RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali

Fascicolo del 21 marzo 1926

MEMORIE E NOTE DI SOCI

Fisica matematica. — *Campo elettrostatico dovuto a un qualunque numero di sottili conduttori elettrizzati di forma cilindrica e ad assi paralleli.* Nota del Corrisp. UMBERTO CISOTTI [1].

Se si considera un piano normale alla comune direzione degli assi dei cilindri, si tratta di determinare il potenziale elettrostatico, funzione armonica nella regione illimitata del piano, esterna a tutte le circonferenze (sezioni delle superficie cilindriche col piano) assumente un valore costante su ciascuna circonferenza e tale che il suo gradiente (forza elettrica) sia regolare nella regione predetta e si annulli all'infinito: sono le consuete condizioni a cui deve soddisfare un potenziale logaritmico.

Sieno n i cilindri e $\gamma_1, \gamma_2, \cdots, \gamma_n$ le n sezioni circolari di raggi $r_1, r_2, \cdots, r_n$; chiamiamo ρ_{kj} la distanza dei centri delle due circonferenze generiche γ_j e γ_k $(j \neq k)$; se r è il maggiore dei raggi predetti e ρ è la minore delle distanze dei centri, supporremo che il rapporto

$$\frac{r}{\rho}$$

si possa trattare come quantità di primo ordine, per cui sono da trascurarsi i quadrati dei rapporti di uno qualunque dei raggi a una qualunque delle distanze dei centri, i prodotti a due a due, ecc.

(1) Presentata nella seduta del 7 febbraio 1926.

In queste condizioni, mi propongo dimostrare come sia possibile la completa risoluzione del problema elettrostatico accennato. Mi sembrano degne di rilievo le relazioni semplici che, nelle fatte ipotesi, legano i potenziali $\psi_1, \psi_2, \cdots, \psi_n$ dei conduttori alle cariche elettriche corrispondenti $e_1, e_2, \cdots, e_n$:

$$\psi_j = -e_j \log r_j - \sum_1^{n(j)}{}_k \, e_k \log \rho_{kj} \qquad , \qquad (j = 1, 2, \cdots, n),$$

rappresentando la sommatoria, la somma degli $n - 1$ termini che si ottengono da $e_k \log \rho_{kj}$ attribuendo a k tutti i valori da 1 a n eccettuato j. Nel caso particolare di un solo conduttore ($n = 1$) la sommatoria è nulla e il secondo membro si riduce al solo primo termine: è un risultato noto. Pertanto la sommatoria rappresenta complessivamente l'influenza su ψ_j della presenza dei rimanenti $n - 1$ conduttori elettrizzati.

La soluzione si presta anche a un'interessante interpretazione idromeccanica che formerà oggetto di un'ulteriore comunicazione.

1. Potenziale elettrico. — Sia $z = x + iy$ la variabile complessa del piano delle n circonferenze $\gamma_1, \gamma_2, \cdots, \gamma_n$; e sieno $z_1, z_2, \cdots, z_n$ le affisse dei rispettivi centri. Nella regione di piano illimitata, esterna alle circonferenze predette, si consideri la funzione:

$$(1) \qquad f(z) = -i \sum_1^n{}_k \left\{ e_k \log (z - z_k) + i \frac{a_k + ib_k}{z - z_k} \right\},$$

indicando e_k, a_k e b_k, 3 n costanti reali, *a priori* indeterminate. Mi propongo appunto di determinarle in modo che, posto $f = \varphi + i\psi$, la funzione ψ si comporti come un potenziale elettrostatico. Giova a tal uopo mettere in particolare rilievo nella (1) un termine generico, cioè scrivere la (1) nel modo seguente:

$$(1') \quad f(z) = -ie_j \log (z - z_j) + \frac{a_j + ib_j}{z - z_j} - i \sum_1^{n(j)}{}_k \left\{ e_k \log (z - z_k) + i \frac{a_k + ib_k}{z - z_k} \right\},$$

il simbolo di sommatoria si riferisce ora a tutti gli n termini tranne quello messo in evidenza.

Sopra la circonferenza γ_j si ha:

$$(2) \qquad z - z_j = r_j e^{i\sigma} \qquad , \qquad (0 \leq \sigma \leq 2\pi),$$

per cui, per $k \neq j$, posto:

$$(3) \qquad z_j - z_k = \rho_{kj} e^{i\theta_{kj}} \text{ (1)},$$

(1) Si rilevi che ρ_{kj} rappresenta la distanza mutua dei due punti z_j e z_k e θ_{kj} è l'angolo che la retta $z_k \rightarrow z_j$ forma coll'asse reale.

si ha:

$$(4)\qquad z - z_k = z_j - z_k + r_j e^{i\sigma} = \rho_{kj} e^{i\theta_{kj}} + r_j e^{i\sigma} = \rho_{kj} e^{i\theta_{kj}} \left\{ 1 + \frac{r_j}{\rho_{kj}} e^{i(\sigma - \theta_{kj})} \right\}.$$

Dalla (2) si ricava:

$$(5)\qquad \log (z - z_j) = \log r_j + i\sigma \quad , \quad \frac{1}{z - z_j} = \frac{e^{-i\sigma}}{r_j};$$

dalla (4), colla sopraccennata approssimazione, si ha:

$$\log (z - z_k) = \log \rho_{kj} + i\theta_{kj} + \frac{r_j}{\rho_{kj}} e^{i(\sigma - \theta_{kj})},$$

$$\frac{1}{z - z_k} = \frac{e^{-i\theta_{kj}}}{\rho_{kj}} \left\{ 1 - \frac{r_j}{\rho_{kj}} e^{i(\sigma - \theta_{kj})} \right\}.$$

Per queste e per le (5), la (1′) fornisce per i valori che la funzione f assume sulla circonferenza γ_j l'espressione seguente:

$$f(z_j + r_j e^{i\sigma}) = -ie_j (\log r_j + i\sigma) + \frac{a_j + ib_j}{r_j} e^{-i\sigma} -$$

$$- i \sum_1^{n\,(j)}{}_k e_k \left\{ \log \rho_{kj} + i\theta_{kj} + \frac{r_j}{\rho_{kj}} e^{i(\sigma - \theta_{kj})} \right\} + \sum_1^{n\,(j)}{}_k \frac{a_k + ib_k}{\rho_{kj}} \left\{ 1 - \frac{r_j}{\rho_{kj}} e^{i(\sigma - \theta_{kj})} \right\} e^{-i\theta_{kj}}.$$

Ponendo:

$$(6)\qquad f(z_j + r_j e^{i\sigma}) = \varphi_j + i\psi_j$$

e separando la parte reale dalla parte immaginaria, si ottiene:

$$(7)\qquad \begin{cases} \varphi_j = e_j \sigma + \dfrac{1}{r_j} (a_j \cos\sigma + b_j \operatorname{sen}\sigma) + \displaystyle\sum_1^{n\,(j)}{}_k e_k \left\{ \theta_{kj} + \frac{r_{ij}}{\rho_{kj}} \operatorname{sen}(\sigma - \theta_{kj}) \right\} + \\ \quad + \displaystyle\sum_1^{n\,(j)}{}_k \frac{1}{\rho_{kj}} (a_k \cos\theta_{kj} + b_k \operatorname{sen}\theta_{kj}) - \\ \quad - r_j \displaystyle\sum_1^{n\,(j)}{}_k \frac{1}{\rho_{kj}^2} \left\{ a_k \cos(\sigma - 2\theta_{kj}) + b_k \operatorname{sen}(\sigma - 2\theta_{kj}) \right\}, \\ \psi_j = -e_j \log r_j + \dfrac{1}{r_j} (b_j \cos\sigma - a_j \operatorname{sen}\sigma) - \\ \quad - \displaystyle\sum_1^{n\,(j)}{}_k e_k \left\{ \log \rho_{kj} + \frac{r_j}{\rho_{kj}} \cos(\sigma - \theta_{kj}) \right\} + \sum_1^{n\,(j)}{}_k \frac{1}{\rho_{kj}} (b_k \cos\theta_{kj} - a_k \operatorname{sen}\theta_{kj}) - \\ \quad - r_j \displaystyle\sum_1^{n\,(j)}{}_k \frac{1}{\rho_{kj}^2} \left\{ b_k \cos(\sigma - 2\theta_{kj}) - a_k \operatorname{sen}(\sigma - 2\theta_{kj}) \right\}. \end{cases}$$

Il secondo membro di quest'ultima è lineare in $\operatorname{sen}\sigma$ e $\cos\sigma$, raccogliendone i termini, si ricava:

$$\psi_j = -e_j \log r_j + \left[\frac{b_j}{r_j} - r_j \sum_1^{n\,(j)}{}_k \frac{e_k}{\rho_{kj}} \cos\theta_{kj} - r_j \sum_1^{n\,(j)}{}_k \frac{b_k \cos 2\theta_{kj} + a_k \operatorname{sen} 2\theta_{kj}}{\rho_{jk}^2}\right] \cos\sigma -$$

$$-\left[\frac{a_j}{r_j} + r_j \sum_1^{n\,(j)}{}_k \frac{e_k}{\rho_{kj}} \operatorname{sen}\theta_{kj} + r_j \sum_1^{n\,(j)}{}_k \frac{b_k \operatorname{sen} 2\theta_{kj} - a_k \cos 2\theta_{kj}}{\rho_{kj}^2}\right] \operatorname{sen}\sigma -$$

$$-\sum_1^{n\,(j)}{}_k e_k \log \rho_{kj} + \sum_1^{n\,(j)}{}_k \frac{1}{\rho_{kj}} (b_k \cos\theta_{kj} - a_k \operatorname{sen}\theta_{kj}).$$

Se si impone a ψ_j di mantenere valore costante su γ_j dovranno essere nulli i coefficienti di $\cos\sigma$ e di $\operatorname{sen}\sigma$ che sono entro le parentesi quadre, il che, tenuto conto della approssimazione voluta, porta a stabilire le seguenti relazioni:

$$(8) \qquad a_j = -r_j^2 \sum_1^{n\,(j)}{}_k \frac{e_k}{\rho_{kj}} \operatorname{sen}\theta_{kj} \quad , \quad b_j = r_j^2 \sum_1^{n\,(j)}{}_k \frac{e_k}{\rho_{kj}} \cos\theta_{kj} .$$

Per queste, e sempre nel solito ámbito di approssimazione, il valore costante di ψ_j su γ_j risulta essere:

$$(9) \qquad \psi_j = -e_j \log r_j - \sum_1^{n\,(j)}{}_k e_k \log \rho_{kj} .$$

2. Comportamento della coniugata del potenziale. — Ci interesserà di avere anche i valori di φ_j su γ_j. La prima delle (7) diviene:

$$\varphi_j = e_j \sigma + \left[\frac{a_j}{r_j} - r_j \sum_1^{n\,(j)}{}_k \frac{e_k}{\rho_{kj}} \operatorname{sen}\theta_{kj}\right] \cos\sigma +$$

$$+\left[\frac{b_j}{r_j} + r_j \sum_1^{n\,(j)}{}_k \frac{e_k}{\rho_{kj}} \cos\theta_{kj}\right] \operatorname{sen}\sigma + \sum_1^{n\,(j)}{}_k e_k \theta_{kj} ,$$

ovvero, per le (8),

$$(10) \qquad \varphi_j = e_j \sigma + \frac{2}{r_j} (a_j \cos\sigma + b_j \operatorname{sen}\sigma) + \sum_1^{n\,(j)}{}_k e_k \theta_{kj} .$$

Ci sarà utile avere anche la espressione di $\frac{d\varphi_j}{d\sigma}$; si ottiene, dalla precedente:

$$(11) \qquad \frac{d\varphi_j}{d\sigma} = e_j + \frac{2}{r_j} (-a_j \operatorname{sen}\sigma + b_j \cos\sigma).$$

3. Densità elettrica. — Indicando con n la normale in un generico punto della superficie del conduttore γ_j, rivolta verso l'interno, la densità di distribuzione della elettricità è:

$$\mu_j = \frac{1}{2\pi}\frac{d\psi_j}{dn},$$

ma, per la monogeneità tra le funzioni, armoniche, associate φ_j e ψ_j si ha[1]:

$$\frac{d\psi_j}{dn} = \frac{d\varphi_j}{ds},$$

rappresentando ds l'elemento di circonferenza γ_j (è $ds > 0$ quando si descrive la circonferenza lasciando l'area circolare alla sinistra). Ora è

$$ds = r_j\, d\sigma,$$

per cui, tenuto conto della (11), si ha in definitiva:

$$\mu_j = \frac{1}{2\pi r_j}\frac{d\varphi}{d\sigma} = \frac{e_j}{2\pi r_j} + \frac{1}{\pi r_j^2}(-a_j \operatorname{sen}\sigma + b_j \cos\sigma),$$

che, per le (8), può scriversi:

$$\mu_j = \frac{e_j}{2\pi r_j} + \frac{1}{\pi}\sum_1^{n}{}^{(j)}_k \frac{e_k}{\rho_{kj}}\cos(\sigma - \theta_{kj}). \tag{12}$$

Risulta da questa che se $n = 1$, cioè il campo elettrostatico è mantenuto da un solo conduttore, la sommatoria è nulla e si ottiene μ_j costante, che corrisponde alla uniforme distribuzione di elettricità nel conduttore, come già si sapeva.

Se invece è $n > 1$, μ_j non è più costante su ciascun conduttore e ciò è dovuto alla presenza degli altri conduttori elettrizzati, e la sommatoria rappresenta precisamente l'influenza di questi sulla distribuzione della elettricità sul conduttore che si considera.

4. Massa elettrica. — La massa elettrica del generico conduttore γ_j sarà, tenuta presente la (12):

$$\int_{\gamma_j} \mu_j\, ds = r_j \int_0^{2\pi} \mu_j\, d\sigma = e_j.$$

Da ciò si deduce il significato fisico delle costanti $e_1, e_2, \cdots, e_n$: esse definiscono le masse elettriche dei conduttori.

(1) Cfr. la mia *Idromeccanica piana*, Parte prima [Milano, Libreria Editrice Politecnica (1921), p. 2.

NOTE PRESENTATE DA SOCI

Matematica. — *Sulle superficie continue che ammettono area finita.* Nota del dott. GIOVANNI LAMPARIELLO, presentata[1] dal Corrisp. L. TONELLI.

Mi propongo di dimostrare il seguente

TEOREMA. - *Se l'area, nel senso di Lebesgue*[2], *della superficie continua* $z = f(x, y)$, $Q \equiv (0 \leq x \leq 1 \quad , \quad 0 \leq y \leq 1)$ *è finita, esiste (finito) l'integrale doppio classico (di Lebesgue)*:

$$\iint_Q \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}\, dxdy .$$

1. Indico con $(0, 1)_x$ l'intervallo $0 \leq x \leq 1$, $y = 0$ e con $(0, 1)_y$ l'intervallo $0 \leq y \leq 1$, $x = 0$. Divido $(0, 1)_x$ in m_p parti mediante i punti $0 = x_0 < x_1 < \cdots < x_r < x_{r+1} < \cdots < x_{m_p - 1} < x_{m_p} = 1$ e $(0, 1)_y$ in n_p parti mediante i punti $0 = y_0 < y_1 < \cdots < y_s < y_{s+1} < \cdots < y_{n_p + 1} < y_{n_p} = 1$ e conduco per i punti x_r ed y_s le parallele agli assi Ox ed Oy rispettivamente. In tal modo il quadrato Q rimane diviso in $m_p n_p$ rettangoli $\alpha_{r,s} \equiv (x_r \leq x \leq x_{r+1} \quad , \quad y_s \leq y \leq y_{s+1})$.

Suppongo che: 1)

$$\lim_{p \to \infty} (x_{r+1} - x_r) = \lim_{p \to \infty} (y_{s+1} - y_s) = 0 \quad , \quad r = 0, 1, \cdots, m_p - 1 \quad ,$$

$$s = 0, 1, \cdots, n_p - 1 ;$$

2) da ogni suddivisione di Q si passi alla successiva conservando le rette di divisione e intercalandone delle nuove. Si deve dimostrare che, se il minimo limite delle aree delle superfici poliedriche, di cui la superficie data è limite, è finito, esiste (finito) l'integrale sopra scritto, inteso nel senso di Lebesgue.

(1) Nella seduta del 7 marzo 1926.

(2) H. LEBESGUE, *Intégrale, Longueur, Aire (Thèse)*, « Annali di Mat. », S. III, t. VII, 1902, p. 302.

2. Comincio col dimostrare che: posto [1]

$$S'_{m_p,n_p} = \sum_{r=0}^{m_p-1} \sum_{s=0}^{n_p-1} \int_{x_r}^{x_r+\varepsilon} |f(x, y_{s+\varepsilon}) - f(x, y_s)| \, dx ,$$

$$S''_{m_p,n_p} = \sum_{r=0}^{m_p-1} \sum_{s=0}^{n_p-1} \int_{y_s}^{y_s+\varepsilon} |f(x_{r+\varepsilon}, y) - f(x_r, y)| \, dy ;$$

le somme S'_{m_p,n_p}, S''_{m_p,n_p} restano limitate qualunque sia la suddivisione del quadrato Q.

Sia $\Pi^{(1)}, \Pi^{(2)}, \cdots, \Pi^{(n)}, \cdots$ una successione di superficie poliedriche (anche non inscritte nella superficie data) convergenti alla superficie data e tali che le loro aree convergano all'area S della $z = f(x, y), (Q)$.

Poniamo

$$\beta_{r,s} = \int_{x_r}^{x_r+\varepsilon} |f(x, y_{s+\varepsilon}) - f(x, y_s)| \, dx ,$$

$$\gamma_{r,s} = \int_{y_s}^{y_s+\varepsilon} |f(x_{r+\varepsilon}, y) - f(x_r, y)| \, dy$$

$$\tau^2_{r,s} = \alpha^2_{r,s} + \beta^2_{r,s} + \gamma^2_{r,s} \qquad \text{e} \qquad T_p = \sum_{r=0}^{m_p-1} \sum_{s=0}^{n_p-1} \tau_{r,s} .$$

Sia $\Pi^{(n)}_{r,s}$ la porzione di $\Pi^{(n)}$ composta di tutti i punti aventi per proiezione ortogonale sul piano (x, y) i punti definiti dalle limitazioni:

$$x_r < x < x_{r+\varepsilon} \quad , \quad y_s < y < y_{s+\varepsilon} \quad ; \quad x = x_r \quad , \quad y_s \leq y \leq y_{s+\varepsilon} \quad ;$$

$$x_r \leq x \leq x_{r+\varepsilon} \quad , \quad y = y_s ,$$

e siano $\Pi^{(n)_1}_{r,s}$, $\Pi^{(n)_2}_{r,s}$ le proiezioni ortogonali di $\Pi^{(n)}_{r,s}$ rispettivamente sui piani $(x, z), (y, z)$. Sia infine $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_p, \cdots$ una successione di numeri positivi, tendenti a zero.

Dagli Elementi si sa che

$$(1) \qquad \left(\Pi^{(n)}_{r,s}\right)^2 \geq \alpha^2_{r,s} + \left(\Pi^{(n)_1}_{r,s}\right)^2 + \left(\Pi^{(n)_2}_{r,s}\right)^2 .$$

Se si associa ad ogni $\alpha_{r,s}$ uno stesso numero $\varepsilon > 0$, si scorge che, in virtù della convergenza di $\Pi^{(n)}$ alla superficie data, esistono un indice $n'_{r,s}$, tale che, per $n \geq n'_{r,s}$, si abbia

$$\Pi^{(n)_1}_{r,s} > \beta_{r,s} - \varepsilon$$

(1) La considerazione di queste somme appartiene a ZOARD DE GEÖCZE, *Quadrature des surfaces courbes (Thèse)*, «Mathematische und Naturwissenschaftliche Berichte aus Ungarn», Leipzig, Teubner, 1909.

e un indice $n''_{r,s}$, tale che, per $n \geqq n''_{r,s}$, si abbia

$$\Pi^{(n)_2}_{r,s} > \gamma_{r,s} - \varepsilon .$$

Epperò detto $N_{r,s}$ il maggiore dei due numeri naturali $n'_{r,s}$, $n''_{r,s}$, si conclude che, per $n \geqq N_{r,s}$, si ha

$$\Pi^{(n)}_{r,s} \geqq \sqrt{\alpha^2_{r,s} + (\beta_{r,s} - \varepsilon)^2 + (\gamma_{r,s} - \varepsilon)^2} \geqq \sqrt{\alpha^2_{r,s} + \beta^2_{r,s} + \gamma^2_{r,s}} - 2\varepsilon = \tau_{r,s} - 2\varepsilon .$$

Poichè, per ogni p, gli $\alpha_{r,s}$ sono in numero di $m_p\, n_p$, se si sceglie ε con la condizione

$$2\,\varepsilon\, m_p\, n_p \leqq \varepsilon_p ,$$

detto N_p il massimo degli $m_p\, n_p$ indici $N_{r,s}$, ne viene che ad ε_p corrisponde N_p, tale che, per $n \geqq N_p$, si abbia

$$(2) \qquad \Pi^{(n)} = \sum_{r=0}^{m_p - 1} \sum_{s=0}^{n_p - 1} \Pi^{(n)}_{r,s} \geqq T_p - \varepsilon_p .$$

Ora osservo che al tendere di p all'∞, ε_p tende a zero e T_p converge al suo limite superiore. Dunque questo limite superiore è $\leqq$ al $\lim_{n \to \infty} \Pi^{(n)} = S$.

Perciò, qualunque sia p, si ha

$$S'_{m_p, n_p} < S \quad , \quad S''_{m_p, n_p} < S .$$

3. Pongo ora

$$\varphi_{n_p}(x) = \sum_{s=0}^{n_p - 1} |f(x, y_{s+1}) - f(x, y_s)| \quad , \quad \psi_{m_p}(y) = \sum_{r=0}^{m_p - 1} |f(x_{r+1}, y) - f(x_r, y)| .$$

Si ha allora:

$$S'_{m_p, n_p} = \sum_{r=0}^{m_p - 1} \int_{x_r}^{x_{r+1}} \varphi_{n_p}(x)\, dx = \int_0^1 \varphi_{n_p}(x)\, dx < S ,$$

$$S''_{m_p, n_p} = \sum_{s=0}^{n_p - 1} \int_{y_s}^{y_{s+1}} \psi_{m_p}(y)\, dy = \int_0^1 \psi_{m_p}(y)\, dy < S .$$

Per le ipotesi fatte al n. 1 si ha, qualunque sia p:

$$\varphi_{n_p}(x) \leqq \varphi_{n_{p+1}}(x) \quad , \quad \psi_{m_p}(y) \leqq \psi_{m_{p+1}}(y)$$

e poichè le $\varphi_{n_p}(x)$ e $\psi_{m_p}(y)$ sono funzioni non negative, si potrà applicare il noto teorema d'integrazione per serie del Levi alle successioni degli

integrali $\int_0^1 \varphi_{n_p}(x)\,dx$, $\int_0^1 \psi_{m_p}(y)\,dy$. Esistono dunque due funzioni $\varphi(x)$ e $\psi(y)$ le quali quasi dappertutto in $(0,1)_x$ e $(0,1)_y$ rispettivamente sono i limiti finiti delle successioni delle $\varphi_{n_p}(x)$ e $\psi_{m_p}(y)$. Di più si ha:

$$\lim_{p\to\infty}\int_0^1 \varphi_{n_p}(x)\,dx = \int_0^1 \varphi(x)\,dx \quad , \quad \lim_{p\to\infty}\int_0^1 \psi_{m_p}(y)\,dy = \int_0^1 \psi(y)\,dy .$$

Si scorge subito che la $\varphi(x)$ dà per ogni valore di x dell'intervallo $(0,1)_x$ la variazione totale della funzione $f(x,y)$ sul segmento i cui estremi sono $(x,0)$, $(x,1)$ e la $\psi(y)$ dà per ogni valore di y di $(0,1)_y$ la variazione totale della funzione $f(x,y)$ sul segmento i cui estremi sono $(0,y)$, $(1,y)$.

Nell'ipotesi dunque che l'area S della superficie $z = f(x,y)$, (Q), sia finita, si può affermare che esistono (finiti) gli integrali $\int_0^1 \varphi(x)\,dx$, $\int_0^1 \psi(y)\,dy$ e che pertanto le funzioni $\varphi(x)$ e $\psi(y)$ ammettono valore finito quasi dappertutto in $(0,1)_x$ e $(0,1)_y$ rispettivamente.

Ciò significa che la $f(x,y)$ è a variazione limitata rispetto ad x per quasi tutti i valori di y di $(0,1)_y$, ed è a variazione limitata rispetto ad y per quasi tutti i valori di x di $(0,1)_x$.

4. Sia ora y un valore tale che la $f(x,y)$ sia a variazione limitata sul segmento s di estremi $(0,y)$, $(1,y)$. La variazione totale della $f(x,y)$ su tale segmento è $\psi(y)$.

Per un noto teorema di Lebesgue, la $f(x,y)$ ammette la derivata parziale rispetto ad x, $\frac{\partial f}{\partial x}$, quasi dappertutto in s e di più si ha:

$$\int_0^1 \left|\frac{\partial f}{\partial x}\right| dx \leq \psi(y). \tag{3}$$

La funzione $\left|\frac{\partial f}{\partial x}\right|$ è superficialmente misurabile ed integrabile rispetto alla x. Dunque $F(x,y) \equiv \int_0^x \left|\frac{\partial f}{\partial x}\right| dx$ è una funzione superficialmente misurabile [1] e pertanto è linearmente misurabile su quasi tutte le parallele all'asse Oy. Sia allora $\xi_1 < \xi_2 < \cdots < \xi_n < \cdots$ una successione di punti tendenti ad 1 e tale che sulla retta $x = \xi_n$ (qualunque sia n) la $F(x,y)$ sia linearmente misurabile. Poichè la $F(x,y)$ è continua rispetto alla x, si ha $\lim_{n\to\infty} F(\xi_n, y) = F(1,y)$ per ogni y di $(0,1)_y$.

(1) L. Tonelli, *Sull'integrazione per parti*, (questi «Rendiconti», 1909, p. 251).

Siccome poi $F(\xi_n, y)$ è misurabile rispetto alla y, $F(1, y)$ risulta misurabile. Allora in virtù della (3), la $F(1, y)$ è integrabile e si ha:

$$\int_0^1 dy \int_0^1 \left| \frac{\partial f}{\partial x} \right| dx \leq \int_0^1 \psi(y)\, dy .$$

Dunque, per un teorema di L. Tonelli [1], esiste l'integrale $\iint_Q \left| \frac{\partial f}{\partial x} \right| dxdy$.

Analogamente si dimostrerebbe che è integrabile su Q anche $\left| \frac{\partial f}{\partial y} \right|$.

E poichè è

$$\sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2} \leq 1 + \left| \frac{\partial f}{\partial x} \right| + \left| \frac{\partial f}{\partial y} \right|$$

ne viene che esiste l'integrale

$$\iint_Q \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}\, dx\, dy .$$

Meccanica. — *Sulla generalizzazione di una notevole formula di Joukovsky nel moto per inerzia di un giroscopio semirigido.* Nota di ORAZIO LAZZARINO, presentata [2] dal Socio R. MARCOLONGO.

In una mia Nota precedente [3], alla quale mi riferisco per le notazioni e per la bibliografia, mi occupai della variazione dell'energia cinetica nel moto per inerzia di un giroscopio rigido con cavità riempite da fluidi. Qui mi propongo di precisare meglio una mia formola, più generale di quella di Joukovsky, la quale esprime la variazione, nell'unità di tempo, dell'energia cinetica totale del giroscopio, anche per fluidi interni viscosi e compressibili e indipendentemente da particolari ipotesi sulla grandezza delle forze di attrito tra fluidi e solido.

Parto senz'altro dalla formola (2), ivi stabilita, la quale, posto

$$(1) \qquad \varphi = \pi - U + \frac{\lambda + \mu}{\rho} \operatorname{div} P',$$

può più semplicemente scriversi

$$(2) \qquad \sum_1^h \int P'' \times P'_r \cdot d\tau = \sum_1^h \int \operatorname{grad} \varphi \times P'_r \cdot d\tau + \sum_1^h \int \nu \cdot \Delta' P' \times P'_r \cdot d\tau ,$$

(1) L. TONELLI, ibid., p. 246-247.
(2) Nella seduta del 17 gennaio 1926.
(3) Cfr. questi « Rend. », vol. XXX, ser. 5ª, 1° sem., 1921, pp. 113-116.

essendo indicate con apici le derivate rispetto al tempo e riferendosi le sommatorie alle h cavità del giroscopio.

Giova tener presente che, se per un punto generico delle pareti σ delle dette cavità $\boldsymbol{a}$ è il vettore della forza di attrito; $\boldsymbol{n}$ un vettore unitario normale a σ e rivolto verso l'interno della cavità; $\mathbf{F}_n$ il vettore della pressione esercitata dai fluidi per unità di superficie ed $\mathbf{F}_t$ la componente tangenziale di tale pressione; si suppongono soddisfatte, in tutti i punti delle σ, le condizioni

$$(3) \qquad \boldsymbol{a} = -m\,\mathrm{P}_r' \quad , \quad \mathbf{F}_t = -\boldsymbol{a} \quad , \quad \mathrm{P}_r' \times \boldsymbol{n} = 0;$$

essendo m un numero reale che caratterizza la grandezza della forza di attrito sul cui valore non occorre alcuna particolare ipotesi.

Tenendo poi conto della terza delle (3) e di formole note [1], la seconda sommatoria d'integrali di volume della (2) può scriversi

$$\sum_1^h \int \operatorname{grad}\varphi \times \mathrm{P}_r' \cdot d\tau = -\sum_1^h \int \varphi \cdot \boldsymbol{n} \times \mathrm{P}_r' \cdot d\sigma -$$

$$-\sum_1^h \int \mathrm{I}_1 \left(\varphi \cdot \frac{d\mathrm{P}_r'}{d\mathrm{P}}\right) d\tau = -\sum_1^h \int \mathrm{I}_1 \left(\varphi \cdot \frac{d\mathrm{P}_r'}{d\mathrm{P}}\right) d\tau .$$

D'altra parte, osservando che [Cfr. formola (1) Nota citata]

$$\mathrm{P}_r' = \mathrm{P}' - \Omega \wedge (\mathrm{P} - \mathrm{O}) \quad , \qquad (\Omega \times \alpha\Omega)' = -2\,\Omega \times \mathbf{M}',$$

dove, rispetto al punto fisso O, Ω è il vettore della rotazione del giroscopio, α l'omografia d'inerzia della sola parte rigida, $\mathbf{M}$ il momento totale d'impulso delle sole parti fluide, il primo membro della (2) si può scrivere

$$\sum_1^h \int \mathrm{P}'' \times \mathrm{P}_r' \cdot \rho\, d\tau = \frac{d}{dt}\,\frac{1}{2}\left[\sum_1^h \int \mathrm{P}'^2 \cdot \rho\, d\tau + \Omega \times \alpha\Omega\right] = \frac{d\mathrm{T}}{dt},$$

essendo

$$(4) \qquad \mathrm{T} = \frac{1}{2}\left[\sum_1^h \int \mathrm{P}'^2 \cdot \rho\, d\tau + \Omega \times \alpha\Omega\right]$$

l'energia cinetica totale del sistema.

Sostituendo ora nella (2) le nuove espressioni ed osservando che $\mu = \nu\rho$, si trova

$$(5) \qquad \frac{d\mathrm{T}}{dt} = \sum_1^h \int \mu \cdot \Delta' \mathrm{P}' \times \mathrm{P}_r' \cdot d\tau - \sum_1^h \int \rho \cdot \mathrm{I}_1 \left(\varphi \cdot \frac{d\mathrm{P}_r'}{d\mathrm{P}}\right) d\tau .$$

(1) Cfr. C. Burali-Forti et R. Marcolongo, *Analyse vectorielle générale* [ediz. 1912, I, p. 111 (2)]. Questo testo sarà indicato con la sigla A. V. G.

In particolare, quando P'_r è indipendente da P, si ha

$$\frac{dT}{dt} = \sum_1^h \int \mu \cdot \Delta' P' \times P'_r \cdot d\tau$$

cioè « sussiste la (6) della precitata Nota ».

Nell'ipotesi generale di P'_r funzione di P, trasformo la (5) in modo che in essa figurino le forze di attrito.

Per formole note [A. V. G., I, p. 111 (2)], la prima sommatoria d'integrali della (5) può scriversi

$$\sum_1^h \int \mu \Delta' P' \times P'_r \cdot d\tau = - \sum_1^h \int \mu \left(\frac{dP'}{dP} \boldsymbol{n} \right) \times P'_r \cdot d\sigma -$$

$$- \sum_1^h \int \mu \cdot I_1 \left(\frac{dP'_r}{dP} \cdot K \frac{dP'}{dP} \right) d\tau .$$

D'altra parte, se l'omografia β delle pressioni delle masse fluide è, nelle ipotesi più generali, espressa da

$$\beta = p - 2\mu \frac{dP'}{dP} - \lambda I_1 \frac{dP'}{dP},$$

essendo p l'intensità della pressione specifica unitaria relativa allo stato di equilibrio, λ e μ le costanti di Lamé, si ha

$$\mathbf{F}_n = \beta \boldsymbol{n} = p \boldsymbol{n} - 2\mu \left(\frac{dP'}{dP} \boldsymbol{n} \right) - \lambda \cdot I_1 \frac{dP'}{dP} \cdot \boldsymbol{n}.$$

Allora, tenendo anche conto delle (3), si deduce successivamente

$$- \int \mu \left(\frac{dP'}{dP} \boldsymbol{n} \right) \times P'_r \cdot d\sigma = \frac{1}{2} \int \left[\mathbf{F}_n - p\boldsymbol{n} + \lambda \cdot I_1 \frac{dP'}{dP} \cdot \boldsymbol{n} \right] \times P'_r \cdot d\sigma =$$

$$= \frac{1}{2} \int \mathbf{F}_n \times P'_r \cdot d\sigma = \frac{1}{2} \int [\mathbf{F}_t + \mathbf{F}_n \times \boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{n}] \times$$

$$\times P'_r \cdot d\sigma = \frac{1}{2} \int \mathbf{F}_t \times P'_r \cdot d\sigma = - \frac{1}{2} \int \boldsymbol{a} \times P'_r \cdot d\sigma.$$

Dopo ciò la (5) assume la forma cercata

$$\frac{dT}{dt} = - \frac{1}{2} \sum_1^h \int \boldsymbol{a} \times P'_r \cdot d\sigma - \tag{6}$$

$$- \sum_1^h \int \left[\mu \cdot I_1 \left(\frac{dP'_r}{dP} \cdot K \frac{dP'}{dP} \right) + \rho \cdot I_1 \left(\varphi \cdot \frac{dP'_r}{dP} \right) \right] d\tau$$

e, indipendentemente da particolari ipotesi sulle grandezze m delle forze di attrito tra fluidi e solido, dà l'espressione della variazione, nell'unità di tempo, dell'energia cinetica totale del giroscopio, anche quando i fluidi interni siano viscosi e compressibili.

La (6) è più generale della nota formola di Joukovsky e deve essere sostituita, nelle predette ipotesi, alla (8) *della mia precitata Nota.*

Volendo ricercare le condizioni di esistenza di *moti limiti*, di moti cioè per i quali la variazione dell'energia cinetica totale risulti nulla, basta osservare che, scrivendo [A. V. G., I, p. 34 (7) e p. 44 (2)]

$$I_1\left(\frac{dP'_r}{dP}\cdot K\frac{dP'}{dP}\right)=I_1\frac{dP'_r}{dP}\cdot I_1\frac{dP'}{dP}+I_2\frac{dP'_r}{dP}+I_2\frac{dP'}{dP}-I_2\left(\frac{dP'_r}{dP}+\frac{dP'}{dP}\right),$$

si vede immediatamente che, per P'_r indipendente dai punti P, l'ultima sommatoria d'integrali della (6) si annulla e si ha

$$\frac{dT}{dt}=-\frac{1}{2}\sum_1^h\int \boldsymbol{a}\times P'_r\cdot d\sigma. \tag{7}$$

Ora, affinchè il secondo membro di (7) si annulli è necessario e basta che sia $P'_r=0$, non essendo P'_r normale ad $\boldsymbol{a}$. D'altra parte, per $P'_r=0$ risulta pure: $I_1\left(\frac{dP'_r}{dP}\cdot K\frac{dP'}{dP}\right)=0$, $I_1\left(\varphi\cdot\frac{dP'_r}{dP}\right)=0$; quindi il moto limite del sistema è caratterizzato dalla sola condizione $P'_r=0$ che importa come unica soluzione

$$P'=\Omega\wedge(P-O). \tag{8}$$

Cioè, in conformità di quanto è stato già trovato in una Nota precedente [1]: *il moto limite si ha quando le masse fluide interne si comportano in modo da formare come un tutto rigido con la parte solida del giroscopio.*

(1) O. Lazzarino, questi «Rend.», vol. XXX, ser. 5ª, 1° sem., 1921, pp. 246-249.

Matematica. — *Sul problema del Dini.* Nota di M. Guérard des Lauriers, presentata[1] dal Socio T. Levi-Civita.

1. La ricerca di tutte le coppie di « ds^2 » che ammettono le stesse linee geodetiche è stata fatta dal Dini, il quale ha ottenuto per queste coppie la forma ben nota:

$$\begin{cases} ds^2 = (U - V)(du^2 + dv^2), \\ ds_1^2 = \lambda\left(\frac{1}{V+a} - \frac{1}{U+a}\right)\left(\frac{du^2}{U+a} + \frac{dv^2}{V+a}\right). \end{cases}$$

Ma, il calcolo di Dini suppone che questi due « ds^2 » siano contemporaneamente riducibili alla forma:

$$\text{(A)} \qquad \begin{cases} ds^2 = E\,du^2 + G\,dv^2, \\ ds_1^2 = E_1\,du^2 + G_1\,dv^2. \end{cases}$$

Una tale riduzione è sempre effettuabile quando una almeno delle forme quadratiche è definita, ma nel caso in cui entrambe siano indefinite, si può anche avere la forma canonica

$$\text{(B)} \qquad \begin{cases} ds^2 = 2\,F\,du\,dv, \\ ds_1^2 = E_1\,du^2 + 2\,F_1\,du\,dv. \end{cases}$$

Infatti, sia in generale:

$$\begin{cases} ds^2 = E\,du^2 + 2\,F\,du\,dv + G\,dv^2, \\ ds_1^2 = E_1\,du^2 + 2\,F_1\,du\,dv + G_1\,dv^2, \end{cases}$$

(supponendo fatta la riduzione agli stessi parametri u, v).

Se l'equazione

$$\text{(1)} \qquad \begin{vmatrix} E - \rho E_1 & F - \rho F_1 \\ F - \rho F_1 & G - \rho G_1 \end{vmatrix} = 0$$

ha due radici distinte, è possibile ridurre i due « ds^2 » alla forma (A).

(1) Nella seduta del 7 febbraio 1926.

Ora, interpretando du, dv come coordinate omogenee sopra una retta D, le due equazioni $\begin{cases} ds^2 = 0 \\ ds_1^2 = 0 \end{cases}$ definiscono due coppie di punti, e una delle due è costituita da punti immaginari, per essere definito uno dei due « ds^2 ». Queste due coppie definiscono sopra D una involuzione della quale i punti doppi corrispondono alle radici dell'equazione (1). Ma quest'involuzione si può ottenere, segando la retta D con un fascio di cerchi passante per due punti fissi reali α, β; e i punti doppi corrispondono ai cerchi che toccano D. Ma quando si trova nell'involuzione una coppia di punti immaginari, i due punti fissi α e β sono dalla stessa parte del piano rispetto a D (nessuno dei due essendo sopra D); e quindi, i due cerchi che toccano D sono reali e distinti, e quindi, anche le radici dell'equazione (1).

Ma quando nessuno dei due « ds^2 » è definito, l'equazione (1) può avere una radice doppia; perciò, occorre e basta:

$$4\,(EG - F^2)\,(E_1 G_1 - F_1^2) - (E_1 G + E G_1 - 2\,F F_1)^2 = 0,$$

ossia

$$4\,(E F_1 - F_1 E)\,(F G_1 - G F_1) - (E G_1 - G E_1)^2 = 0,$$

ed allora, le due forme hanno una radice in comune:

$$\begin{cases} ds^2 = (a du + b dv)\,(\alpha\, du + \beta\, dv), \\ ds_1^2 = (a du + b dv)\,(\alpha_1 du + \beta_1 dv), \end{cases}$$

e, con cambiamento di variabili, si raggiunge la forma canonica:

$$(B) \qquad \begin{cases} ds^2 = 2\,F\, du\, dv \\ ds_1^2 = E_1 du^2 + 2\,F_1\, du\, dv \end{cases} \qquad \text{dove} \qquad E_1, F_1, F \neq 0,$$

perchè, se fosse $E_1 = 0$, saremmo nel caso di Dini;

se fosse $F_1 = 0$, avremmo una superficie sviluppabile circoscritta al cerchio dell'infinito.

Ed allora, le due forme (A), (B) sono essenzialmente distinte, e bisogna estendere la ricerca del Dini al tipo (B). Per questi due « ds^2 » (B), le equazioni delle linee geodetiche sono rispettivamente:

$$-2\,F^2\,(du\,d^2v - dv\,d^2u) = -2\,F\,\frac{\partial F}{\partial u}\,du^2 dv + 2\,F\,\frac{\partial F}{\partial v}\,du\,dv^2.$$

$$-2\,F_1^2\,(du\,d^2v - dv\,d^2u) = \left(E_1\,\frac{\partial E_1}{\partial v} + F_1\,\frac{\partial E_1}{\partial u} - 2\,E_1\,\frac{\partial F_1}{\partial u}\right) du^3 +$$

$$+ \left(3\,F_1\,\frac{\partial E_1}{\partial v} - 2\,F_1\,\frac{\partial F_1}{\partial u}\right) du^2 dv + 2\,F_1\,\frac{\partial F_1}{\partial v}\,du\,dv^2$$

e perchè coincidano, bisogna che siano soddisfatte le tre condizioni:

$$(2) \qquad \frac{1}{F}\cdot\frac{\partial F}{\partial v} = \frac{1}{F_1}\cdot\frac{\partial F_1}{\partial v},$$

$$(3) \qquad \frac{1}{F}\cdot\frac{\partial F}{\partial u} = \frac{1}{F_1}\cdot\frac{\partial F_1}{\partial u} - \frac{3}{2F_1}\cdot\frac{\partial E_1}{\partial v},$$

$$(4) \qquad \frac{1}{F_1}\cdot\frac{\partial E_1}{\partial v} + \frac{1}{E_1}\cdot\frac{\partial E_1}{\partial u} - \frac{2}{F_1}\cdot\frac{\partial F_1}{\partial u} = 0.$$

Dalla (2), si trae:

$$(2)' \qquad F = F_1 U^3 \qquad \text{(U essendo una funzione della } u\text{, che non è zero),}$$

donde, derivando logaritmicamente rispetto ad u:

$$\frac{1}{F}\cdot\frac{\partial F}{\partial u} = \frac{1}{F_1}\cdot\frac{\partial F_1}{\partial u} + 3\frac{U'}{U},$$

dopo di che la (3) si può scrivere:

$$(3)' \qquad \frac{1}{2F_1}\cdot\frac{\partial E_1}{\partial v} = -\frac{U'}{U},$$

e riportando questo valore nella (4), viene:

$$(4)' \qquad \frac{1}{E_1}\cdot\frac{\partial E_1}{\partial u} = \frac{2}{F_1}\cdot\frac{\partial F_1}{\partial u} + \frac{2U'}{U},$$

ed integrando rispetto ad u:

$$V'^2 E_1 = F_1^2 U^2,$$

dove V' è la derivata d'una funzione V di v, e non è zero.

Dunque si ha:

$$F_1 = \sqrt{E_1}\,\frac{V'}{U},$$

e riportando nella (3)':

$$\frac{1}{2\sqrt{E_1}}\frac{\partial E_1}{\partial v} = -\frac{U'}{U^2}V'$$

donde

$$\sqrt{E_1} = -\frac{U'V}{U^2} + U.$$

Dunque, si ha:

$$E_1 = \left(U - \frac{U'V}{U^2}\right)^2 \qquad ; \qquad F_1 = \frac{V'}{U}\left(U - \frac{U'V}{U^2}\right) \qquad ;$$

$$F = V'(UU^2 - U'V),$$

E – cambiando il segno della F, ciò che è lecito – i due « ds^2 » sono:

$$\begin{cases} ds^2 = 2\,(\mathrm{U}'\,\mathrm{V} - U\mathrm{U}^2)\,\mathrm{V}'\,du\,dv, \\ ds_1^2 = \left(U - \dfrac{\mathrm{U}'\,\mathrm{V}}{\mathrm{U}^2}\right)^2 du^2 + 2\,\dfrac{\mathrm{V}'}{\mathrm{U}}\left(U - \dfrac{\mathrm{U}'\,\mathrm{V}}{\mathrm{U}^2}\right) du\,dv. \end{cases}$$

Se $\mathrm{U}' = 0$, i due spazi sono euclidei.
Se $\mathrm{U}' \neq 0$, si può scrivere:

$$\begin{cases} ds^2 = 2\left(\mathrm{V} - \dfrac{U\mathrm{U}^2}{\mathrm{U}'}\right)\mathrm{U}'\,du\cdot\mathrm{V}'\,dv, \\ ds_1^2 = \left(\mathrm{V} - \dfrac{U\mathrm{U}^2}{\mathrm{U}'}\right)^2 \dfrac{\mathrm{U}'^2\,du^2}{\mathrm{U}^4} - \dfrac{2}{\mathrm{U}^3}\left(\mathrm{V} - \dfrac{U\mathrm{U}^2}{\mathrm{U}'}\right)\mathrm{U}'\,du\cdot\mathrm{V}'\,dv \end{cases}$$

e ponendo

$$\begin{cases} \mathrm{U}(u) = u_1 \\ \mathrm{V}(v) = v_1 \\ \dfrac{U\mathrm{U}^2}{\mathrm{U}'} = \mathrm{U}_1(u_1) \end{cases}$$

e omettendo gli indici, si hanno in fine le forme canoniche:

$$\begin{cases} ds^2 = 2\,(v - \mathrm{U})\,du\,dv & (\alpha) \\ ds_1^2 = (v - \mathrm{U})^2\,\dfrac{du^2}{u^4} - \dfrac{2}{u^3}\,(v - \mathrm{U})\,du\,dv. & (\beta) \end{cases}$$

Ora cerchiamo di ridurre ds_1^2 alla forma (α). Poniamo:

$$v - \mathrm{U} = \rho$$

onde

$$dv = d\rho + \mathrm{U}'\,du$$

$$ds_1^2 = \frac{\rho\,du}{u^3}\left[\frac{\rho\,du}{u} - 2\,dv\right] = \frac{\rho\,du}{u^3}\left[\frac{\rho\,du}{u} - 2\,d\rho - 2\,\mathrm{U}'\,du\right]$$

o

$$ds_1^2 = \frac{\rho\,du}{u^2\sqrt{u}}\left[\frac{\rho\,du}{u\sqrt{u}} - 2\,\frac{d\rho}{\sqrt{u}} - \frac{2\,\mathrm{U}'}{\sqrt{u}}\,du\right].$$

Poniamo

$$v_1 = \frac{\rho}{\sqrt{u}} + \int \frac{\mathrm{U}'}{\sqrt{u}}\,du$$

abbiamo

$$ds_1^2 = \frac{\rho}{\sqrt{u}}\cdot\frac{du}{u^2}\cdot[-2\,dv_1] = \left[v_1 - \int\frac{\mathrm{U}'}{\sqrt{u}}\,du\right]\cdot\frac{du}{u^2}\cdot[-2\,dv_1]$$

e se infine poniamo $u = \frac{1}{u_1}$, la funzione $F(u) = \int \frac{U'}{\sqrt{u}}\, du$ sarà una funzione U_1 della u_1, ed avremo:

$$ds_1^2 = 2(v_1 - U_1)\, du_1\, dv_1 .$$

Si vede subito la relazione di reciprocità fra le due funzioni U ed U_1. Difatti, si ha:

$$U_1(u_1) = F\left(\frac{1}{u_1}\right) \qquad \text{con} \qquad F(u) = \int \frac{U'}{\sqrt{u}}\, du .$$

Adesso, partiamo dalla U_1 e formiamo

$$F_1(u_1) = \int \frac{U_1'(u_1)}{\sqrt{u}}\, du_1 .$$

Ma $\left(\text{siccome } U_1(u_1) = F\left(\frac{1}{u_1}\right)\right)$, si ha

$$U_1'(u_1) = \left(-\frac{1}{u_1^2}\right)\left[F'\left(\frac{1}{u_1}\right)\right],$$

e poi:

$$F'(u) = \frac{U'}{\sqrt{u}},$$

e quindi

$$F'\left(\frac{1}{u_1}\right) = \left[U'\left(\frac{1}{u_1}\right)\right]\sqrt{u_1},$$

e dunque riportando:

$$F_1(u_1) = \int \frac{\left[U'\left(\frac{1}{u_1}\right)\right]\sqrt{u_1}\left(-\frac{1}{u_1^2}\right)}{\sqrt{u_1}}\, du_1 = \int \left[U'\left(\frac{1}{u_1}\right)\right]\left(-\frac{du_1}{u_1^2}\right)$$

e ponendo $u_1 = \frac{1}{u}$, la funzione che ne risulta è appunto la U.

Questa relazione di reciprocità fra U ed U_1 può assumere una forma abbastanza semplice, ponendo:

$$\begin{cases} U(u) = u^{\frac{1}{4}}\, U(u) \\ U_1(u) = u^{\frac{1}{4}}\, U_1(u) \end{cases}$$

allora, la relazione

$$U_1'(u) = -\frac{1}{u^2} U'\left(\frac{1}{u}\right)\sqrt{u}$$

si scrive:

$$\frac{1}{4} u^{-\frac{3}{4}} U_1(u) + u^{\frac{1}{4}} U_1'(u) = -\frac{1}{u^2}\left[\frac{1}{4} u^{\frac{3}{4}} U\left(\frac{1}{u}\right) + u^{-\frac{1}{4}} U'\left(\frac{1}{u}\right)\right]\sqrt{u}$$

ossia, moltiplicando per $4u^{-\frac{3}{4}}$:

$$[R] \qquad U\left(\frac{1}{u}\right) + U_1(u) + 4\left[u U_1'(u) + \frac{1}{u} U'\left(\frac{1}{u}\right)\right] = 0.$$

Matematica. — *Sur la convergence des séries de Fourier.* Nota di A. Kolmogoroff e G. Seliverstoff, presentata [1] dal Corrispondente Tonelli.

Dans une Note récente [2] nous avons donné une condition de convergence des séries trigonométriques plus forte que les conditions analogues données précédemment par Messieurs Fatou, Weyl, Hobson, Plancherel et Hardy [3]. Précisément nous avons démontré, que *la convergence (sauf l'ensemble mince) de la série trigonométrique*

$$(1) \qquad \sum_{n=2}^{n=\infty} (a_n \cos n x + b_n \operatorname{sen} n x)$$

est une conséquence de la convergence de la série

$$\sum_{n=2}^{n=\infty} [\log n]^{1+\varepsilon} (a_n^2 + b_n^2)$$

pour ε *positif quelconque.*

Il y est aussi indiqué que toutes les conditions données précédémment (la plus forte d'entre elles, celle de M. Hardy, ne diffère de la nôtre que du facteur $[\log n]^2$ au lieu de $[\log n]^{1+\varepsilon}$) restent justes pour un système de fonctions orthogonales; tandis que notre condition, d'après les travaux de M. Menchoff [4], n'est pas juste pour quelques systèmes orthogonales; donc la démonstration de notre théorème n'est fondée que sur des caractères particuliers du système trigonométrique.

(1) Nella seduta del 7 febbraio 1926.

(2) « Comptes Rendus », t. 178 (1924), p. 303.

(3) Fatou, « Acta Mathematica », t. 30, p. 379; Weyl, « Mathematische Annalen », t. 67, p. 225; Hobson, « Proc. London Math. Soc. », sér. 2, t. 12, p. 297; Plancherel, « Comptes Rendus », t. 156, 2 juin 1913; Hardy, « Proc. London Math. Soc. », sér. 2, t. 12, p. 365.

(4) « Fundamenta Mathematicae », t. IV, p. 89, 1922.

Dans cette Note nous démontrons une proposition plus simple, et précisément que : *la convergence (sauf l'ensemble mince) de la série* (1) *est une conséquence de la convergence de la série*

$$(2) \qquad \sum_{n=2}^{n=\infty} \log n \ (a_n^2 + b_n^2) .$$

1. *Lemme.* — Étant donnée une somme trigonométrique

$$S(x) = \sum_{k=2}^{k=n} (a_k \cos k x + b_k \sin k x) ,$$

on a l'inégalité suivante :

$$(3) \qquad \int_0^{2\pi} \frac{S_{k(x)}(x)}{\sqrt{\log k(x)}} dx < \sqrt{C \sum_{p=2}^{p=n} (a_p^2 + b_p^2)} .$$

Dans cette expression $k(x)$ est une fonction arbitraire, qui ne prend que les valeurs $2, 3, 4 \cdots n$; $S_{k(x)}(x)$ est la somme des k premiers termes de $S(x)$, et C est une constante absolue.

Démonstration.

$$\int_0^{2\pi} \frac{S_{k(x)}(x)}{\sqrt{\log k(x)}} dx = \int_0^{2\pi} \frac{1}{\sqrt{\log k(x)}} \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} S(\alpha) \sum_{p=1}^{p=k(x)} \cos p(x-\alpha) \, d\alpha \, dx =$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} S(\alpha) \int_0^{2\pi} \frac{\sum_{p=1}^{p=k(x)} \cos p(x-\alpha)}{\sqrt{\log k(x)}} dx \, d\alpha \leq (1)$$

$$\leq \sqrt{\frac{1}{\pi^2} \int_0^{2\pi} S^2(\alpha) \, d\alpha \int_0^{2\pi} \left[\int_0^{2\pi} \frac{\sum_{p=1}^{p=k(x)} \cos p(x-\alpha)}{\sqrt{\log k(x)}} dx \right]^2 d\alpha} =$$

$$= \sqrt{\frac{1}{\pi} \sum_{p=2}^{p=n} (a_p^2 + b_p^2) \cdot I} .$$

Pour prouver l'inégalité (3) il ne reste qu'à démontrer que I est une quantité bornée.

$$I = \int_0^{2\pi} \left[\int_0^{2\pi} \frac{\sum_{p=1}^{p=k(x)} \cos p(x-\alpha)}{\sqrt{\log k(x)}} dx \right]^2 d\alpha =$$

$$= \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\sum_{p=1}^{p=k(x)} \cos p(x-\alpha) \sum_{p=1}^{p=k(y)} \cos q(y-\alpha)}{\sqrt{\log k(x) \ \log k(y)}} dx \, dy \, d\alpha = (2)$$

$$= \pi \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\sum_{p=1}^{p=k(x,y)} \cos p(x-y)}{\sqrt{\log k(x) \ \log k(y)}} dx \, dy ,$$

(1) D'après l'inégalité de Schwarz.

(2) En intégrant par rapport à α et en se servant de l'orthogonalité du système trigonométrique.

où $k(x, y)$ désigne le moindre d'entre les nombres $k(x)$ et $k(y)$. Déterminons l'ensemble P des points (x, y) pour lesquels $k(x) \leqq k(y)$ et, par conséquent, $k(x, y) = k(x)$, $\log k(y) \geqq \log k(x)$. Les points qui restent forment l'ensemble Q : pour eux $k(y) < k(x)$, $k(x, y) = k(y)$, $\log k(x) > \log k(y)$. Nous aurons à present:

$$\frac{|I|}{\pi} \leqq \left| \iint_P \frac{\sum_{p=1}^{p=k(x)} \cos p(x-y)}{\log k(x)} dx\,dy \right| + \left| \iint_Q \frac{\sum_{p=1}^{p=k(y)} \cos p(x-y)}{\log k(y)} dx\,dy \right| \leqq$$

$$\leqq \int_0^{2\pi} \frac{1}{\log k(x)} \int_0^{2\pi} \left| \sum_{p=1}^{p=k(x)} \cos p(x-y) \right| dx\,dy +$$

$$+ \int_0^{2\pi} \frac{1}{\log k(y)} \int_0^{2\pi} \left| \sum_{p=1}^{p=k(y)} \cos p(x-y) \right| dx\,dy .$$

Il est facile de voir que la dernière expression ne surpasse pas une constante absolue C[1].

2. La condition (2) étant satisfaite par la série (1), on peut trouver une fonction croissante à l'infini $\tau(n)$, telle que la série

$$(4) \qquad \sum_{n=2}^{n=\infty} \tau(n) \log n \,(a_n^2 + b_n^2)$$

sera aussi convergente.

Notons:

$$A_n = \sqrt{\tau(n) \log n}\, a_n \quad , \quad B_n = \sqrt{\tau(n) \log n}\, b_n .$$

Donc la série (4) se transforme ainsi:

$$\sum_{n=2}^{n=\infty} (A_n^2 + B_n^2) .$$

Désignons encore:

$$S_n(x) = \sum_{k=2}^{k=n} (A_k \cos k\,x + B_k \sin k\,x),$$

$$\sigma_n(x) = \frac{1}{n} \sum_{k=2}^{k=n} S_k(x),$$

$$\Delta_n = \frac{1}{\sqrt{\tau(n) \log n}} - \frac{1}{\sqrt{\tau(n+1) \log (n+1)}},$$

$$\Delta_n' = \Delta_n - \Delta_{n+1} .$$

La fonction $\tau(n)$ peut être définie d'une telle manière que tous les Δ_n soient positives. Dans ce cas la série

$$\sum_{n=2}^{\infty} n\,\Delta_n' = \frac{1}{\tau(2)} + \Delta_2 .$$ (1)

(1) On a

$$\sum_{n=2}^{\infty} n\,\Delta_n' = \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{k=n}^{\infty} \Delta_k' + \sum_{k=2}^{\infty} \Delta_k' = \sum_{n=2}^{\infty} \Delta_n + \Delta_2 = \frac{1}{\tau(2)} + \Delta_2 .$$

converge absolument, et par conséquent on a.

$$n\,\Delta_n = n\sum_{k=n}^{\infty}\Delta'_k < \sum_{k=n}^{\infty} k\,\Delta'_k \rightarrowtail 0\,.$$

En appliquant à la série (1) deux fois la transformation d'Abel, nous aurons

$$(5)\qquad \sum_{n=2}^{n=\infty}(a_n\cos n\,x + b_n \sin n\,x) =$$

$$= \sum_{n=2}^{n=\infty}\frac{1}{\sqrt{\tau(n)\log n}}(A_n\cos n\,x + B_n \sin n\,x) =$$

$$= \sum_{n=2}^{n=\infty}\Delta_n S_n(x) = \sum_{n=2}^{n=\infty} n\,\Delta'_n\,\sigma_n(x)\,.$$

Pour justifier la transformation il est suffisant de démontrer les conditions connues:

$$\frac{S_n(x)}{\sqrt{\tau(n)\log(n)}} \rightarrowtail 0 \quad , \quad n\,\Delta_n\,\sigma_n \rightarrowtail 0\,.$$

La seconde condition est satisfaite si σ_n est borné, c'est à dire presque partout. Que la condition première est aussi verifiée presque partout, cela s'ensuit de notre lemme. Enfin, si la suite σ_n converge (ce qui a lieu presque partout) la série (5) converge. Donc la convergence de la série (1) est demontrée (sauf l'ensemble mince).

Fisica. — *Effetti immediati ed effetti ereditari nella torsione di un filo di Bismuto.* - Nota di Bianca Nannei, presentata [1] dal Socio V. Volterra.

Allo scopo di completare e chiarire alcune ricerche che sto eseguendo sull'effetto di un campo magnetico sulla viscosità di un filo di bismuto, volli prima studiarne le proprietà elastiche, ottenendo risultati interessanti che ritengo opportuno di esporre. Seguendo i metodi classici di misure notai subito che il comportamento elastico non poteva esser messo in evidenza con esattezza, poichè esso era assai complesso e dipendeva evidentemente da elementi di cui tali metodi non tenevano conto. Ciò spiega come, per esempio, l'Harris studiando appunto la viscosità del bismuto col metodo delle oscillazioni di torsione, potè dare solamente dei risultati dai quali non si riesce a scindere, che molto difficilmente, le varie cause del complesso comportamento del filo stesso.

(1) Nella seduta del 7 marzo 1926.

Decisi perciò di studiare il fenomeno riferendolo ad uno schema più ampio nel quale si potesse tener conto anche degli effetti ereditari che certamente intervengono.

Scelsi allora lo schema generale, cui aveva già accennato il Prof. Straneo in una Nota pubblicata in questi Rendiconti [2], ed istituii due differenti serie di misure rispettivamente di tipo dinamico (oscillazioni) e di tipo quasi statico (cicli di isteresi). Potei constatare e differenziare esattamente, almeno in modo qualitativo, la presenza e gli effetti simultanei delle proprietà elastiche ordinarie (elasticità, attrito interno) e delle proprietà di natura ereditaria. Fra di esse è risultata evidente la presenza di due effetti ereditari, quello tipico e ordinariamente considerato, che si dissipa col tempo, e un secondo effetto che non si dissipa e che presenta notevoli caratteri di analogia da una parte, e di differenza dall'altra col fenomeno dell'isteresi che gli corrisponde nel magnetismo.

I. - Prove oscillatorie:

1. *Descrizione dell'apparecchio impiegato e delle esperienze.* — L'apparecchio era composto di un tubo cilindrico di ottone della lunghezza di 50 cm. e del diametro di 15 mm., superiormente terminato a guisa di cono ed inferiormente in una impanatura a cui era avvitata una scatola cilindrica, anch'essa di ottone e tagliata anteriormente da una finestra.

Il filo di bismuto lungo 25 cm. veniva sospeso entro il tubo mediante un tappo conico di ottone che si adattava a perfetta tenuta all'imboccatura conica del tubo, e dal quale pendeva verso l'interno un grosso filo di qualche centimetro di lunghezza, portante alla sua estremità una pinza di ottone cui veniva assicurata l'estremità superiore del filo di bismuto. Un'analoga pinza, sospesa all'estremità inferiore, portava a sua volta un filo di ottone al quale si agganciava il carico tensore.

Il filo di ottone portava pure uno specchio che permetteva di osservare le oscillazioni. Chiudendo la finestra con una lastra di vetro di spessore conveniente si poteva praticare il vuoto entro tutto l'apparecchio.

Per torcere il filo, in un primo tempo applicavo ad esso meccanicamente una coppia, raggiungendo subito il valore massimo desiderato. Siccome però notavo, con questo metodo, uno spostamento dello zero, anche per piccoli valori della coppia, ed inoltre una asimmetria nelle oscillazioni, ricorsi ad un altro sistema.

Intorno ad uno dei dischi di fibra costituenti il carico tensore del filo di bismuto avvolsi alcune spire di filo di rame chiuse in corto circuito. Al disotto del sistema oscillante poi disposi un campo magnetico rotante di piccola intensità. Chiudendo il circuito della corrente generatrice del

(2) *Sulla espressione dei fenomeni ereditari.* Vol. XXXIV, serie 5ª, 1° sem. 1925, p. 29.

campo, le spire di rame e tutto il sistema sospeso solidale con esse, riceveva un impulso che provocava una piccola oscillazione. Invertendo la corrente di una fase ad ogni mezzo periodo dell'oscillazione, se ne poteva aumentare l'ampiezza a volontà senza applicare nessun impulso praticamente prevalente nell'una o nell'altra direzione.

In questo modo, durante il periodo in cui agiva il campo, il filo compiva oscillazioni di ampiezze man mano crescenti, mentre quando quello non agiva più, il filo compiva oscillazioni di ampiezze decrescenti sino a smorzamento completo.

Le ampiezze delle oscillazioni venivano lette con un cannocchiale su di una scala posta di fronte allo specchio della sospensione. Contemporaneamente mediante un cronometro, potevo determinare il periodo medio, di piccoli gruppi di oscillazioni di ampiezze poco differenti.

2. *Risultati.* — Osservai così, com'era già stato notato, dall'Harris sul bismuto e da altri autori su fili di sostanze diverse, che il periodo varia coll'ampiezza. Tenendo la scala ed il cannocchiale alla distanza di un metro dallo specchio della sospensione, le torsioni massime erano quelle corrispondenti a 500 mm. della scala e quindi corrispondenti a circa 13°,5 gradi.

Dalla sensibile diminuzione della durata dei periodi di oscillazione e più ancora dalla grande diminuzione dello smorzamento (dovuto essenzialmente all'attrito interno del filo) col diminuire delle ampiezze, risultò evidente che coteste oscillazioni non avvengono secondo la legge che d'ordinario s'ammette per le piccole oscillazioni.

Perciò ho ritenuto inutile procedere per mezzo delle consuete formule a determinazioni di coefficienti, che non avrebbero avuto alcun certo valore. Per poter tentare con probabilità di riuscita tali determinazioni è necessario calcolare l'andamento delle oscillazioni, tenendo conto anche di quelle proprietà caratteristiche del filo in questione che sono senza dubbio di natura più complessa di quelle ammesse nelle ordinarie trattazioni, e che è prevedibile siano di natura ereditaria.

Perciò passai senz'altro alle prove di isteresi, colla riserva di interpretare in seguito i risultati oscillatori, che d'altronde non differiscono sensibilmente da quelli riportati dall'Harris.

Mi pare però utile far notare un'anomalia riscontrata che è evidentemente dovuta alla costituzione meccanica, o meglio al modo di fabbricazione del filo di bismuto, il quale certamente è stato trafilato per compressione e non per trazione, come si usa per la maggior parte dei metalli. Questi fili sono perciò in generale già contorti originariamente in un certo senso. Ciò risulta evidente, sia perchè appunto modificano questa loro torsione a seconda del carico tensore, sia perchè le ampiezze delle grandi oscillazioni assumono valori leggermente differenti nei due sensi. Ma di questa anomalia non è difficile tener conto ed eliminare le conseguenze nocive.

II. – Prove di isteresi.

3. *Descrizione dell'apparecchio.* — Per applicare una serie ciclica di momenti torcenti al filo di bismuto ricorsi ad un semplicissimo dispositivo elettrodinamometrico. Sospesi verticalmente il filo nell'asse di un supporto che poteva venire dolcemente rotato per mezzo di un movimento a vite. All'estremità inferiore del filo sospesi le spire mobili di un antico elettrodinamometro tipo Siemens, coi consueti contatti a pozzetti di mercurio per la corrente. Naturalmente data la fragilità del filo questi due attacchi vennero fatti per mezzo di opportune pinze ben centrate. Una bobina fissa normale a quella mobile completava, come d'ordinario, il sistema elettrodinamometrico.

Alla bobina mobile ed al supportino rotante superiore, furono applicati due specchi per poterne misurare le rotazioni relative con sistemi a riflessione. Un dispositivo semplicissimo permetteva infine di invertire la corrente nelle spire mobili, onde ottenere momenti torcenti nei due sensi.

4. *Descrizione dell'esperienza.* — Con successive inversioni della corrente la quale veniva contemporaneamente diminuita fino a zero, si sottoponeva dapprima il filo ad una lunga serie di torsioni contrarie e decrescenti, onde portarlo allo stato che tutti gli autori sono concordi a considerare come ben definito e perciò atto ad essere assunto come stato di riferimento. Poi si applicavano successivamente in un senso o nell'altro, a partire dallo zero, momenti torcenti che stavano fra loro come i numeri 1, 2, 3, 4, 5, 6, 5, 4, 3, 2, 1, 0, — 1, — 2, — 3, — 4, — 5, — 6, — 5, — 4, — 3, — 2, — 1, o viceversa.

Tali momenti venivano generati per mezzo di correnti che stavano fra di loro rispettivamente come le radici quadrate dei numeri precedenti, e che si variavano a uguali intervalli di tempo. Dopo ogni variazione di corrente, facevo ruotare il supportino superiore nel senso e dell'angolo opportuni per ricondurre le spire mobili nella posizione normale, e leggevo per mezzo dei due specchi la corrispondente torsione del filo.

5. *Risultati.* — Anche queste esperienze vennero eseguite tutte su fili di bismuto di cm. 25 di lunghezza e mm. 0,5 di diametro.

Gli intervalli di tempo tra ogni variazione del momento torcente furono successivamente di minuti primi 3, 2, 1, e $^1/_2$.

Nella figura unita sono tracciati i cicli percorsi, nei tempi suaccennati, e nei sensi diretto e inverso.

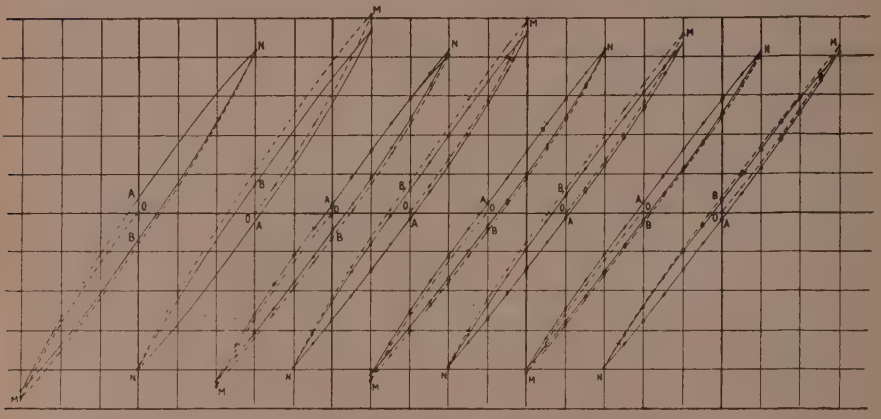
Sulle ascisse sono portati i momenti torcenti e sulle ordinate le torsioni corrispondenti. Il tempo complessivo per tracciare un ciclo completo della prima coppia (in cui le osservazioni sono fatte ogni 3 minuti) è di

72 m.; per la seconda coppia è di 48 m., per la terza di 24 e per la quarta di 12.

Si verificò sempre che le curve ottenute si chiudevano regolarmente, con grande approssimazione in un ciclo periodico, dopo il primo ramo partente dall'origine e terminante ad un primo valore massimo (positivo o negativo a seconda del senso) ed il secondo ramo collegante questo valore massimo ed il massimo successivo di segno opposto (vedi fig. ramo O M N).

In primo luogo risultò intanto evidentissimo che l'ampiezza nel senso verticale dei cicli di isteresi (tratto $\overline{A\ B}$) diminuiva coll'intervallo di tempo che intercedeva fra le successive variazioni dei momenti applicati; segno questo che una parte almeno del fenomeno ereditario dipendeva dal tempo.

Ma risultò pure chiaramente che riducendo sempre più questi intervalli, l'ampiezza del ciclo non tendeva a zero, ciò che si vede facilmente tracciando una curva rappresentativa della quale le ascisse rappresentino



gli intervalli di tempo e le ordinate le ampiezze in questione. Ne consegue che il fenomeno complessivo può venir considerato come la somma di un effetto che a priori non possiamo sapere se sia ereditario o no, ma che ad ogni modo non si dissipa col tempo.

Ma se quest'ultimo effetto non fosse di carattere ereditario, cioè se potesse venire espresso in funzione dello stato del filo per un dato valore del momento (per es. in funzione del valore della torsione per il momento torcente zero) dato che tutti i cicli furono costruiti partendo sempre dallo stesso stato iniziale, dovrebbe essere indipendente dal senso con cui il ciclo viene percorso. In altri termini questo effetto dovrebbe corrispondere esattamente, al fenomeno dell'isteresi magnetica notoriamente indipendente dal senso del ciclo.

Ma un semplice sguardo alle curve ci mostra che esiste *sempre* una asimmetria che è in rapporto col senso del ciclo; asimmetria che non si

può interpretare più spontaneamente e logicamente che come un effetto ereditario permanente, dovuto al fatto che i due primi rami del ciclo hanno lasciata una vera e differente eredità permanente, a seconda del senso con cui sono stati percorsi. Infatti i tratti $\overline{O\,A}$ e $\overline{O\,B}$ (vedi primo ciclo) sono sempre differenti e precisamente il tratto $\overline{O\,A}$, che intercede fra l'origine ed il ramo di *ciclo* percorso nello stesso senso del ramo iniziale, è sempre minore del tratto $\overline{O\,B}$ compreso fra l'origine e il ramo di ciclo percorso in senso contrario al ramo iniziale. Ciò si vede chiaramente anche dalla tabellina qui unita in cui sono dati i valori massimi e le ampiezze espressi in millimetri della scala.

Intervallo di tempo	2′		1′		1/2′	
Ciclo	diretto	inverso	diretto	inverso	diretto	inverso
Massimo positivo . .	460	420	432	420	410	416
» negativo . .	400	434	400	420	400	406
Ampiezza ciclo . . .	76	70	56	54	50	47
Tratto $\overline{OA}$	16	22	16	22	20	22
» $\overline{OB}$	60	48	40	32	30	25

È facile rendersi conto che questa asimetria non è da attribuirsi alla deformazione originaria del filo di cui si è parlato in occasione delle esperienze oscillatorie. Infatti a tale anormalità non si può in alcun modo attribuire la parte preponderante della asimmetria dei cicli, (in particolare la notevole differenza tra i due valori estremi della torsione in uno stesso ciclo), ma solamente la differenza fra i rispettivi due valori maggiori o i due valori minori dei corrispondenti cicli percorsi in senso contrario.

Ad ogni modo per dissipare ogni dubbio, fu eseguita una serie di cicli nei due sensi, limitata ai momenti torcenti 1, 2, 3, 2, 1, 0, — 1, — 2, ecc. ai quali corrispondevano torsioni abbastanza piccole da non essere influenzate dalla suddetta deformazione originaria del filo.

In essi, mentre si conservò sensibilissima la differenza fra i valori estremi di ciascun ciclo, sparì completamente fra gli omologhi valori dei cicli percorsi in senso contrario.

*
* *

La presenza dei fenomeni ereditari rilevati rende preferibile, se non strettamente necessario, per passare al calcolo quantitativo delle varie caratteristiche, ricorrere a cicli nei quali i momenti torcenti vengano variati in modo continuo. Ed appunto per questo scopo sono state iniziate nuove serie di esperienze, sulle quali riferirò prossimamente.

Fisica. — *Basi fisiche per una estensione della teoria dei fenomeni ereditari.* Nota di PAOLO STRANEO, presentata[1] dal Socio V. VOLTERRA.

In una Nota pubblicata l'anno scorso in questi Rendiconti[2] ebbi occasione di insistere sulla necessità di lasciare al concetto di ereditarietà una maggiore estensione di quanto ordinariamente si usi, allorchè si voglia poter inquadrare nel suo schema il reale svolgimento di molti fenomeni fisici e segnatamente quello assai complesso dei fenomeni elastici e magnetici.

Osservavo allora che persino i postulati della *dissipazione dell'azione ereditaria* e del *ciclo chiuso* opportunamente introdotti dal Prof. Volterra come convenienti in moltissimi casi, avrebbero dovuto venir talvolta abbandonati, e mi proponevo di ritornare sull'argomento per precisare la questione.

La fortunata combinazione che la Dott. B. Nannei abbia ora dovuto eseguire esperienze sulla torsione di fili di bismuto in condizioni, in cui tutti i principali elementi del complesso fenomeno elastico–ereditario intervengono in proporzioni tali che nessuno di essi viene a sparire oppure a prevalere sugli altri in modo da occultarlo, ha in massima confermato l'esattezza dello schema teorico che io avevo sommariamente esposto nella Nota ricordata.

In particolare poi una permanente dissimetria di certi cicli di isteresi in dipendenza del senso in cui vengono percorsi, che fu posta in chiara evidenza dalla Sig.na Nannei, viene a confermare la previsione di un tipo di fenomeno ereditario che non si dissipa col crescere del tempo, cioè di un tipo di fenomeno ereditario che non era mai stato considerato prima, ma che io avevo esplicitamente ammesso nel caso in cui intervenissero effetti di plasticità, senza per altro credere che potesse verificarsi tanto palesemente nel caso di piccole deformazioni elastiche.

Esso costituisce forse il più bell'esempio di un tipo di *vero* fenomeno ereditario, che non si dissipa col tempo; ed è tanto più interessante perchè l'isteresi magnetica, come viene ordinariamente intesa in elettrotecnica, cioè come fenomeno *non ereditario*, si presenta molto spontaneamente come il caso limite in cui degenera il tipo analogo di fenomeno magnetico quando, cessando di dipendere da tutti gli infiniti valori precedenti della causa che lo determina (forza magnetizzante), può finalmente venir espresso per mezzo di un'ordinaria funzione della causa stessa.

(1) Nella seduta del 7 marzo 1926.

(2) *Sull'espressione dei fenomeni ereditari*, vol. XXXIV, serie 5ª, 1° sem., 1925, p. 29.

Per tali ragioni ritengo opportuno esporre un po' più diffusamente e completare le vedute cui avevo precedentemente accennato.

I. – Fenomeni attuali e fenomeni ereditari.

1° *Definizioni.* – Diremo *attuali* i fenomeni la cui dipendenza da una o più cause può venir rappresentata mediante funzioni ordinarie delle variabili atte ad esprimere quelle cause, tenendo conto ancora, ove occorra di qualche condizione imposta ai valori del fenomeno per qualche dato valore della causa.

Così ad esempio, per fissar le idee, l'intensità della magnetizzazione che assume un dato pezzo di ferro dolce per forze magnetizzanti abbastanza elevate per poter prescindere dai fenomeni di magnetismo susseguente (che notoriamente si manifestano in modo sensibile solo per magnetizzazioni debolissime e si dissipano dopo un certo tempo) dipende dal valore attuale della forza magnetizzante, alla condizione che il ferro suddetto si sia trovato nello stato di magnetizzazione nulla prima che su di esso abbia agito la forza magnetizzante in questione.

Diremo invece *ereditari* i fenomeni che dipendono dagli infiniti valori per i quali la causa che li ha prodotti, e quindi anche i fenomeni stessi sono precedentemente passati; ragione per cui non possono più venir rappresentati mediante funzioni ordinarie, ma solamente mediante funzioni di linee nel senso dato dal Prof. Volterra a questa espressione.

Considerando ancora lo stesso pezzo di ferro, ma allorchè non sia possibile affermare che si trovi nello stato di magnetizzazione nulla prima che su di esso agisca la forza magnetizzante, non è più possibile esprimere, mediante una funzione ordinaria di essa, l'intensità della sua magnetizzazione quando in seguito tale forza magnetizzante agirà su di esso. E ciò neppure quando anche si conoscesse il valore della sua magnetizzazione in corrispondenza alla forza magnetizzante.

Per ottenere un'adeguata espressione sarà necessario ricorrere ad una funzione di linea, che in generale dovrà aggiungersi ad una funzione ordinaria. E tale funzione di linea dovrà dipendere dagli stati per cui il dato pezzo di ferro sarà passato dal tempo più remoto fino all'istante attuale, o almeno da tutti gli stati che esso avrà assunto dopo essere passato per l'ultima volta per la magnetizzazione nulla in corrispondenza ad una forza magnetizzante pure nulla.

Tutto ciò è notissimo agli elettrotecnici, i quali sempre deducono le *curve di magnetizzazione* di un dato ferro solamente partendo da un suo stato di *magnetizzazione nulla* in un *campo nullo*, e non mai da uno stato non nullo, per quanto noto, perchè sanno per esperienza che in quest'ultimo caso la forma della curva che si otterrebbe, dipenderebbe da tutta la storia magnetica passata di quel pezzo di ferro.

2° *Classificazione della parte ereditaria.* – Come avevo precedentemente accennato, pare che il criterio più pratico sia quello di suddividere i fenomeni ereditari in due categorie, ponendo nella prima quelli per cui l'azione ereditaria si dissipa al crescere del tempo e nella seconda quelli per cui tale azione permane.

Nella prima categoria rientrano la maggior parte dei fenomeni di elasticità e di magnetismo susseguenti.

Nella seconda rientrano senza dubbio, ma in maniera assai complicata, i fenomeni di plasticità, dei quali vari autori hanno tentato dare recentemente espressioni approssimate per mezzo di funzioni ordinarie dei valori attuali delle cause, oltre che di un numero più o meno grande di valori per cui fossero precedentemente passati, o il fenomeno stesso, o le sue cause; tentativo che in fondo si riduce quasi a concepire la soluzione del problema come una funzione di linea, ma a dedurne poi solamente una rappresentazione approssimata degenerata in una funzione ordinaria.

3° *Il postulato del ciclo chiuso.* – Questo postulato che in ultima analisi si riduce ad affermare che per una grandissima categoria di fenomeni ereditari l'effetto di una causa periodica debba essere egualmente periodico è senza dubbio conciliabile, anzi favorito da quello della dissipazione dell'azione ereditaria. Ma non è affatto detto non possa sussistere senza quest'ultimo.

Basterà p. es. che l'azione permanente ereditaria assuma un carattere da non intralciare lo stabilirsi della periodicità, ciò che può avvenire in vari modi, e in particolare divenendo o essa pure periodica, oppure costante. Allora il fenomeno ereditario totale diverrà ancora periodico, pur differendo da quello che si avrebbe avuto nel caso che fossero intervenuti soltanto effetti ereditari dissipantisi col tempo.

I cicli risultanti dovranno avere evidentemente forme differenti nei vari casi; ed è assai interessante rendersi conto delle modificazioni che ad essi debbono apportare l'intervento separato o simultaneo delle varie forme di ereditarietà.

E ciò appunto si studia nel capitolo seguente.

II. – Fenomeni ciclici.

4° *Cicli esprimibili per mezzo di funzioni ordinarie.* – Per semplicità supponiamo che i fenomeni che consideriamo dipendano da un'unica causa e che siano rappresentabili con un unico parametro. Potremo allora usare la consueta loro rappresentazione su di un piano, portando come ascisse i valori della causa e come ordinate i valori del fenomeno. Così il linguaggio sarà facilitato, mentre che un'estensione ai casi più generali sarà senz'altro ancora immediata.

Ora potrà accadere, come notoriamente avviene in moltissimi casi, che ad ogni valore della causa corrisponda un unico valore dell'effetto. Ciò

si verifica per. es. per le variazioni isoterme della pressione di un gas in funzione del volume.

In tal caso ad una variazione periodica della causa lungo un tratto dell'asse delle ascisse, corrisponderà una certa curva nel piano, che non sarà propriamente un vero ciclo, ma che, volendo, potrà essere considerato un ciclo coi due rami sovrapposti.

Ad ogni modo se ad ogni punto del segmento lungo il quale varia la causa, corrisponde sempre lo stesso punto rappresentativo dell'effetto, si potrà dire che esso è esprimibile per mezzo di un'ordinaria funzione monodroma della causa.

Ma potrà anche accadere che il punto rappresentativo dell'effetto percorra un vero ciclo, mentre quello della causa oscilla in un dato intervallo dell'asse delle ascisse. In tal caso la correlazione fra effetto e causa potrà essere ancora una funzione ordinaria, ma polidroma (a due valori) se a ciascun punto della causa corrisponderanno sempre gli stessi due punti rappresentativi dell'effetto; ma non è da escludere che ciò possa anche non avvenire e che lo svolgimento del ciclo debba dipendere dal modo col quale è variata la causa *in tutti i tempi precedenti*.

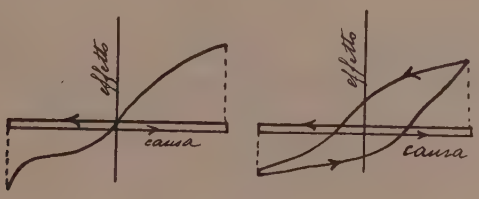


Fig. 1.

Se per es. i cicli di isteresi magnetica, quando siano verificate le condizioni ricordate poc'anzi, rientrano nel tipo di cotesti effetti dipendenti solamente dai valori attuali della causa, come in generale si afferma, dovrà essere possibile, come infatti si è ripetutamente tentato, esprimere tali fenomeni per mezzo di funzioni polidrome a due valori della forza magnetizzante. E per quanto al senso fisico sia certamente più soddisfacente ammettere che in generale i cicli non siano indipendenti da tutto il modo di svolgersi della causa, e che lo diventino solamente quando appunto vengano ad essere verificate quelle condizioni fisiche precedentemente ricordate, non si può oggi escludere che il criterio precedente non possa, per ragioni pratiche, esser conveniente.

Pare che non esistano fenomeni fisici, oltre l'isteresi magnetica, che si presentino con caratteri di questo tipo.

Ad ogni modo cotesti cicli, abbiano essi i loro rami sovrapposti, oppure distinti, sono in generale rappresentabili su di un piano, nello spazio,

o eventualmente in iperspazi ed esprimibili per mezzo di funzioni ordinarie monodrome o polidrome. Anzi, quando, occorrendo, il loro riferimento si faccia a superficie o ipersuperficie di Riemann opportunamente connesse, la loro espressione potrà sempre ottenersi per mezzo di funzioni monodrome.

I due cicli rappresentati nella figura, per i quali non si è voluto supporre nessuna delle simmetrie che d'ordinario si verificano, costituiscono l'esempio più generale di cicli dei due tipi sopra detti, quando l'effetto dipenda da una sola causa.

In essi in generale si verificherà che ai valori estremi della causa corrispondano valori estremi dell'effetto.

5° *Cicli esprimibili per mezzo di funzioni di linee.* – Come già si è detto, quando non si verifichino le condizioni che permettono di esprimere la correlazione ciclica fra effetto e causa per mezzo di funzioni ordinarie, si può risolvere la difficoltà ricorrendo alle funzioni di linea, eminentemente atte ad esprimere qualsiasi forma di effetto ereditario, purchè non si impongano ad esse inutili condizioni restrittive.

Anche nel caso di tali cicli conviene distinguere le azioni ereditarie che si dissipano e quelle che permangono.

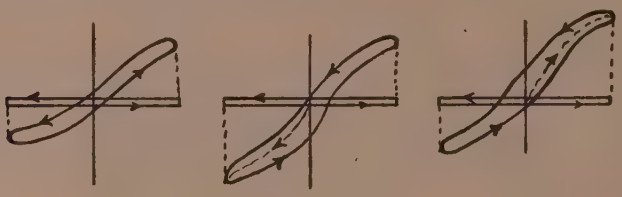


Fig. 2.

a) *Azione ereditaria che si dissipa.* – La forma dei cicli in questo caso dipende evidentemente dalla rapidità colla quale vengono percorsi. Essi non conservano alcuna traccia del periodo iniziale.

Se, come spesso avviene, a valori eguali e di segno opposto della causa, corrispondono pure valori eguali e di segno opposto degli effetti, sia nella parte attuale, sia in quella ereditaria, i cicli in questione saranno in generale simmetrici intorno all'origine, appena si sarà dissipato l'effetto dell'inizio.

La coincidenza dei massimi degli effetti, con quelli delle cause, verrà in generale a mancare; e perciò i cicli stessi non avranno cuspidi, ma saranno piuttosto arrotondati alle estremità.

b) *Azione ereditaria che permane.* – La caratteristica principale di cotesti cicli sarà in generale quella di conservare una traccia, più o meno appariscente, del periodo iniziale. Essa in generale si ripercuote in una dissimetria rispetto all'origine, dipendente essenzialmente dal senso secondo il quale i cicli vennero iniziati e successivamente percorsi.

Nel primo dei tre cicli della figura 2 è ad esempio rappresentata una dipendenza fra effetto e causa in cui interviene solamente un'azione ereditaria dissipantesi col tempo e quindi indipendente dal periodo iniziale.

Negli altri due invece è rappresentata un'analoga dipendenza, ma nell'ipotesi che ad essa si sovrapponga anche un'azione ereditaria permanente e dipendente dal periodo iniziale.

Le espressioni analitiche convenienti nei vari casi verranno date prossimamente.

Fisica terrestre. — *Sull'uso dello smorzamento nei sismografi.* Nota di A. PROVIERO, presentata [1] dal Socio V. CERULLI.

Fra i voti iscritti all'ordine del giorno del Congresso dell'*Associazione Internazionale di Sismologia* - che si sarebbe dovuto riunire a Pietroburgo nell'agosto e settembre 1914, ma che fu impedito dalla guerra europea - figurava che la detta Associazione, desiderando migliorare le osservazioni sismologiche, emettesse il voto che tutti gli strumenti destinati allo studio del vero movimento tellurico fossero provvisti di smorzamento. Tale voto era stato formulato, molto tempo prima, dalla Commissione Permanente Russa di Sismologia della quale era *magna pars* il compianto Principe Galitzin. Questo illustre sismologo, nelle sue pregevoli opere, insiste ripetutamente sul concetto che i grafici di pendoli non smorzati riescono di poco o nessun valore per studi seri di sismometria, specialmente quando c'è quasi risonanza tra il periodo d'onda tellurica (T) e quello d'oscillazione strumentale (T_0), perchè, dovendo l'unico pennino del sismografo tracciare entrambi i movimenti coesistenti, questi verrebbero sul grafico commisti (secondo lo stesso Autore) in maniera non sempre facilmente decifrabile; mentre con un sismografo fortemente smorzato, il quale elimina le oscillazioni strumentali, il grafico darebbe sempre le sole oscillazioni telluriche.

La mancata discussione sull'argomento e qualche pubblicazione in senso contrario al voto del Galitzin [2] non valsero ad imporre almeno un po' di riserbo sopra un giudizio definitivo: a pp. 21-22 delle aggiunte ai Resoconti della 2ª Conferenza dell'Unione Geodesica e Geofisica Internazionale riunita a Madrid nel 1924 può leggersi, per es., un'asserzione per quanto categorica altrettanto gratuita in favore dello smorzamento; e pare che la Commissione Permanente Italiana di Sismologia siasi, non è molto, pronunciata nello stesso senso.

(1) Nella seduta del 7 marzo 1926.

(2) EDOARDO MIER, *Le equazioni fondamentali e lo smorzamento dei sismografi*, «Instituto Geográfico y Estadistico, 1914». Madrid.

Scopo della presente Nota è di far notare che, se lo smorzamento può riuscire utile in sismometria, non è poi esso il solo e più sicuro mezzo per ottenere dai sismogrammi la misura del vero movimento del suolo.

Con miei lavori precedenti [1] mi sono sforzato di provare, in maniera quasi sempre sperimentale, che sui grafici d'un sismografo non smorzato l'ampiezza ed il periodo d'onda tellurica a volte esistono soli, a volte coesistono insieme a quelli dell'oscillazione strumentale; che tali dati trovati sul sismogramma o direttamente o mediante la regola della media, debitamente corretti dal coefficiente d'attrito, possono dare il vero spostamento della particella terrestre, se introdotti nella formola per l'ingrandimento dinamico dei pendoli non smorzati, da me data e dimostrata in maniera anche sperimentale ed elementarissima. Se non che ho fatto sempre notare, e qui lo ripeto, che le condizioni più o meno essenziali tra le quali le dette misure possono attuarsi (e che valgono lo stesso tanto se il sismografo è smorzato, tanto se non lo è), non sempre, nè facilmente si verificano; verificatesi però, anche un sismografo senza smorzamento può dare buoni risultati. Sostenere perciò l'esclusiva bontà dello smorzamento pare per lo meno una esagerazione.

D'altra parte vi sono dei casi frequenti nei quali i grafici di qualsivoglia sismografo smorzato fortemente o leggermente, od anche sprovvisto di smorzamento, dànno eccellenti risultati. Questi casi sono appunto quando i periodi T e T_0 restano molto dissincroni. E di fatti, per scosse vicine o per le fasi preliminari di telesismi, i moti tellurici rapidi registrati da pendoli con periodo lungo (poichè verificasi allora il caso della *massa stazionaria*) il tracciato del sismografo può ritenersi quale una fedele rappresentazione del solo moto tellurico, e ciò vuoi che si tratti di moto armonico che di moto irregolare. Anzi è bene notare che i pendoli senza smorzamento, perchè la loro massa non subisce quel tale ritardo di fase, che deve necessariamente avvenire nei pendoli fortemente smorzati [2], dànno risultati migliori. Per l'altro caso di T molto grande in confronto di T_0 (caso della III fase dei telesismi registrata da pedoli corti) i sismografi non smorzati dànno del pari risultati soddisfacenti, perchè, trattandosi allora di oscillazioni armo-

(1) Id. *Per una dimostrazione elementare dell'ingrandimento dinamico dei pendoli non smorzati in alcuni determinati casi.* « Atti dell'Accademia del Liceo Arcivescovile di Napoli », vol. VII, fasc. 5; *Considerazioni sulle oscillazioni dei pendoli sismografici non smorzati e sull'analisi dei sismogrammi.* « Boll. della Soc. Sismologica Ital. », vol. XXIV, fasc. 6.

(2) Il serio inconveniente, che sposta di vari secondi gl'inizi d'onda sul grafico, è riparato dal Galitzin con una delle solite tabelle di correzione, quando trattasi d'oscillazioni armoniche e che continuano parecchio (*Vorlesungen* ecc., p. 270, fig. 110 e 111). Mentre con periodo corto ed irregolare del moto forzato su pendolo a lungo periodo si ha la fig. 112 (loc. cit.) tutt'altro che soddisfacente per lo stesso Galitzin, perchè interviene lo smorzamento; si sarebbero avuti invece, per lo stesso caso, risultati migliori con pendolo non smorzato, ma... disgraziatamente tale figura manca!

niche e che durano un certo tempo, i grafici risultano, come è a tutti noto, da oscillazioni telluriche ben marcate [1].

Se dunque nello stesso osservatorio esistono almeno due sismografi non smorzati a periodi molto dissincroni tra loro, si ha buona ragione di sperarne effetti identici, se non migliori, che con sismografi fortemente smorzati.

Si noti bene poi che soltanto in questi casi di marcato dissincronismo tra T e T_0 si può avere fiducia in un apparecchio fortemente smorzato, perchè allora soltanto le variazioni nel coefficiente di smorzamento μ^2 non possono influire sull' ingrandimento dinamico dell'apparecchio, mentre, quando vi è risonanza o quasi tra T e T_0, le possibili variazioni, anche piccole, di μ^2 provocano variazioni sull' ingrandimento dinamico [2]. E tali variazioni di μ^2 sono possibilissime! Lo stesso Galitzin infatti critica ogni altro sistema di smorzamento (ad aria o a liquido) che non sia quello adottato da lui, cioè, l'elettromagnetico. Egli dopo avere eccepito che in quei sistemi la resistenza del mezzo è proporzionale al quadrato della velocità e non semplicemente alla velocità, come richiede la teoria dello smorzamento, e dopo avere osservato che financo le variazioni di temperatura possono importare variazioni nello smorzamento ad aria, a pag. 215 (*Vorlesungen* ecc.) testualmente conchiude:

« Nel sistema dello smorzamento elettromagnetico v' è il vantaggio di utilizzare fenomeni e proprietà fisiche esattamente conosciute, mentre negli altri sistemi si applicano le proprietà di fenomeni variabili ed insufficientemente studiati, come la reazione dell'aria o del liquido sopra la parte mobile dell'apparato ». Secondo l' illustre Autore non resterebbe dunque a fidarsi che del solo smorzamento elettromagnetico. Ma si è veramente sicuri che in questo sistema il termine μ^2 dia buon affidamento, magari dopo tutte le interminabili operazioni di calcolo pel taramento ed accordo dello smorzamento col galvanometro, per le relative correzioni dei *minimi quadrati*, per l' introduzione del *shunt* ecc., ecc.? Non potrebbero le variazioni del magnetismo terrestre (ed anche quelle di temperatura) e le tempeste magnetiche [3] influire sulla forza delle calamite tanto dello smorzamento che del galvanometro? Non potrebbero queste stesse cause ed altre ancora, quali le onde hertziane ed i campi elettrici causati da stazioni o linee potenti vicine

(1) Si potrebbe dire che teoricamente, nel caso, sul sismogramma d'un pendolo non smorzato, le oscillazioni strumentali dovrebbero pigliare per ampiezza il sopravvento su quelle telluriche; e sia... ma agli effetti del nostro argomento, il fatto dice il contrario e, cioè, che fin dal loro inizio la III fase dei telesismi dà sole oscillazioni telluriche, forse per i pochi attriti strumentali. Che se l'apparecchio fosse assolutamente immune da attriti e si avessero anche le oscillazioni strumentali, queste non altererebbero periodo ed ampiezza d'onda tellurica, perchè molto dissincroni e perciò facilmente discernibili.

(2) Galitzin, loc. cit., figura 113 a p. 282.

(3) Si pensi alle variazioni cui va incontro un magnetografo, ed ai sismoscopi magnetici usati dai Giapponesi.

o da temporali, influire su dette calamite e sulla massa metallica dell'apparecchio, sui fili di comunicazione nonchè sulle bobine e perciò sulla correntella che anima il movimento dello specchietto del galvanometro, quando si pensa che detta correntella è appena dell'ordine di qualche frazione di *milliampere*? E ciò senza volere entrare nel funzionamento meccanico di tutto il complesso apparecchio galitziano. Si dirà forse che io sottilizzi troppo; ma, quando dai fautori dello smorzamento si vuole restare nel campo della precisione, certi dubbi debbono pur sollevarsi!

Un'altra osservazione: in una memoria di prossima pubblicazione nel vol. XXVI (1926) del Bollettino della *Società Sismologica Italiana* affermo che spesso il sismogramma è l'effetto di varie onde telluriche contemporanee e che, per studiare bene il fenomeno, almeno dal lato qualitativo, occorre possedere nello stesso osservatorio differenti sismografi (almeno due) con periodi molto dissincroni tra loro, perchè ciascuna onda, trovando nel sismografo, dotato d'un periodo più vicino al suo, un vero risonatore, ne resta ingrandita e può essere perciò ben distinta dall'altra. Ora se la necessità di possedere vari apparecchi a periodi diversi è imposta anche per quest'altra ragione, sembra chiaro che l'avvenire della sismometria sia riserbato non già allo smorzamento, ma al dissincronismo. Ciò del resto avevano intuito da tempo altri sismologi, fornendo i loro osservatori di svariati strumenti e raccogliendo così una larga messe di utili registrazioni [1].

Conchiudo quindi che *l'uso dello smorzamento nei sismografi non è necessario*, e dato pure che un apparecchio smorzato dia buono affidamento del termine μ^2, esso è quasi sostituibile anche da un solo apparecchio non smorzato, e certamente con maggior vantaggio da due sismografi, purchè a periodi tra loro dissincroni.

Chimica-fisica. — *La struttura cristallina di alcuni fluoruri di metalli bivalenti.* FeF_2, CoF_2, NiF_2 e ZnF_2 anidri. Nota [2] di Adolfo Ferrari presentata [3] dal Socio Giuseppe Bruni.

In lavori recenti ho studiato il reticolo cristallino del fluoruro di magnesio [4] e di quello manganoso [5]. Successivamente ho esteso questo studio ad altri fluoruri di metalli bivalenti, sulla forma cristallina dei quali nulla si sapeva con precisione, per quanto le analogie dei loro cationi col magnesio e col manganese bivalente rendevano probabile il ritrovare una

(1) G. Agamennone, « Boll. della Soc. Sism. It. », vol. VIII, pp. 49-79.

(2) Lavoro eseguito nel Laboratorio di Chimica Generale della R. Scuola di Ingegneria di Milano.

(3) Nella seduta del 3 gennaio 1925.

(4) « Rend. Accad. Lincei », *1* (6ª), 1° sem., 1925, 664.

(5) « Rend. Accad. Lincei » III, (6ª), 1926, f. 4, p. 224.

struttura tetragonale tipo « rutilo » come quella presentata da MgF_2 e MnF_2. Nel presente lavoro riferisco sulla struttura dei fluoruri bivalenti dei metalli costituenti la prima triade dell'ottavo gruppo del sistema periodico, e del fluoruro di zinco.

Fluoruro ferroso, FeF_2. Questo fluoruro, come pure i seguenti, non si trovano in natura come minerali. Lo studio dei loro reticoli non può quindi essere fatto che sopra prodotti artificiali. Nel caso del fluoruro ferroso la sua preparazione viene resa più difficile dalla facile ossidabilità di questo composto; specialmente all'alta temperatura, alla quale è indispensabile portarlo per avere un prodotto in granuli abbastanza grossi da essere capaci di dare un buon fotogramma. Ho ottenuto il fluoruro ferroso sciogliendo il ferro puro in polvere di Kahlbaum con acido fluoridrico, e portando a secco. Per evitare il contatto dell'aria questa operazione era fatta in un crogiuolo di platino, con coperchio forato attraverso il quale giungeva nel crogiuolo una corrente di idrogeno secco.

Il prodotto ottenuto fu sottoposto all'esame röngtenografico, eseguito col metodo di Debye-Scherrer e Hull, usando un tubo Coolidge ad elettroni con anticatodo di ferro e finestra di vetro Lindemann. Il fotogramma così ottenuto non presentava nessuna linea.

Ho mescolato allora questo prodotto con fluoruro acido d'ammonio e l'ho riscaldato a temperatura abbastanza elevata fino alla completa eliminazione dei fumi ammoniacali. Anche questa operazione era eseguita in corrente di idrogeno, allo scopo di evitare l'ossidazione del sale ferroso.

Dopo questo riscaldamento risottoposto FeF_2 all'esame röngtenografico, ottenni un fotogramma abbastanza netto da permettere di dedurne la struttura. Gli angoli δ misurati [1] su questo fotogramma sono riportati nella colonna due della tabella riferentesi a FeF_2. Le distanze reticolari $\left(d = \frac{\lambda}{2 \operatorname{sen} \frac{\delta'}{2}}\right)$ si ordinano perfettamente nel diagramma di Hull per il reticolo tetragonale semplice al valore $\frac{c}{a} = 0.706 \pm 0.001$. Nella colonna quarta sono dati i valori delle costanti a che si calcolano per le diverse faccie:

$$\left(a = d \sqrt{h_1^2 + h_2^2 + \frac{a^2}{c^2} h_3^2}\right).$$

Da questa serie di valori, che, come si può vedere nella tabella I, vanno leggermente crescendo col crescere dell'angolo δ, ritenendo migliori i va-

(1) Gli angoli δ prima di passare al calcolo di sen $\frac{\delta}{2}$ sono corretti mediante la formola di Pauli, « Zeitsch. f. Kristall. », vol. *56*, p. 604.

lori di a dedotti dalle ultime linee, si ricavano le seguenti costanti del reticolo del fluoruro ferroso:

$$a = 4.670 \pm 0.005 \text{ Å} \qquad c = 3.297 \text{ Å}$$

La densità calcolata ponendo nella cella due molecole:

$$d = \frac{2 \times 93.34 \times 1.66 \times 10^{-24} \text{ gr.}}{71.91 \times 10^{-24} \text{ cm.}} = 4.333$$

risulta alquanto superiore a quella determinata sperimentalmente 4.09 [1].

Il calcolo della intensità è fatto per tutti i fluoruri che fanno oggetto della presente Nota applicando le due formule (1) e (2) riportate nel mio già citato lavoro su MgF_2. Nello stesso lavoro è riprodotto alla fig. 1 il modello dato da Vegard per il rutilo [2]. Attribuendo a questi fluoruri la struttura del rutilo si ottiene un buon accordo fra i valori delle intensità calcolate e quelle osservate. Questo accordo è tale da confermare la perfetta analogia cristallina di questi fluoruri con quelli di magnesio e di manganese che presentano appunto questa struttura. Ho calcolato le intensità attribuendo al parametro del fluoro due valori diversi che apparivano come i più probabili $x = 0.31$ e $x = 0.32$. È però necessario osservare che con questo metodo non si può valutare questo parametro con grande esattezza, perchè piccoli spostamenti dell'ione fluoro danno variazioni delle intensità che rientrano nei limiti degli errori possibili nell'apprezzamento fatto ad occhio di queste. Nel caso di FeF_2 l'accordo migliore si ottiene colla formola (1) e col valore 0.31 del parametro. Quest'ultima affermazione lascia però adito ad incertezza.

Fluoruro di cobalto, CoF_2. Per ottenere questo composto ho fatto reagire, in un crogiuolo di platino coperto, dell'acido fluoridrico concentrato su del carbonato di cobalto. Si ottiene dapprima un sale roseo di colore quasi identico al carbonato. Esso è certamente un sale idrato, probabilmente quello descritto come $CoF_2 \cdot 2H_2O$, e all'esame röngtenografico non diede che qualche debolissima linea. Mescolato a fluoruro acido d'ammonio e riscaldato a bagno d'aria, a lungo, esso perde la sua acqua di cristallizzazione e si trasforma nel fluoruro anidro quasi bianco. Non bisogna eccedere nella temperatura di riscaldamento, perchè il fluoruro passa ad ossido che si riconosce per il suo colore scuro.

(1) Landolt, *Tabellen*, (1923), I 298.

(2) Ricordo che in questo modello le coordinate degli ioni positivi sono:

$$\left(0, 0, 0; \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

quelle dei negativi

$$\left(x, -x, 0; -x, x, 0; \frac{1}{2}+x, \frac{1}{2}+x, \frac{1}{2}; \frac{1}{2}-x, \frac{1}{2}-x, \frac{1}{2}\right).$$

I dati del fotogramma del fluoruro anidro così ottenuto sono riportati nella tabella II. Questo fotogramma è stato ottenuto con anticatodo di nichel che sembra essere il più atto per esaminare i composti di cobalto.

TABELLA I - FeF_2

(diam. prep. 1 mm. – ant. di Fe $K_\alpha = 1.934$ Å, $K_\beta = 1.753$ Å)

N. d'ordine	ϑ	$h_1\ h_2\ h_3$	a	Intensità osservate	Intensità calcolate colla formola (1)	Intensità calcolate colla formola (2)
1	35.7	110	4.630	f	49.3	50.7
2	43.7	101	4.635	mf	24.3	41.3
3	50.5	111	4.640	m	18.6	31.4
—	—	120	—	—	7.7	17.9
4	67.6	121	4.670	ff	54.3	55.7
5	73.0	220	4.660	mf	29.0	22.8
		002	4.655			
6	83.0	130	4.663	mf	24.0	32.0
		221	4.650			
		112	4.650			
7	87.6	031	4.663	mf	35.7	22.0
8	92.5	202	4.666	d	4.6	13.5
		131	4.665			
9	107.0	231	4.673	d	4.5	12.7
10	113.0	400	4.644	mf	32.0	29.6
		222	4.650			
11	123.5	330	4.665	mf	35.5	56.5
		132	4.665			
12	129.3	141	4.667	mf	41.0	53.8
		103	4.671			
—	—	—	—	—	—	—
—	—	—	—	—	—	—
—	—	—	—	—	—	—
—	—	—	—	—	—	—
—	—	—	—	—	—	—

TABELLA II - CoF_2

(diam. prep. 1 mm. – ant. di Ni $K_\alpha = 1.656$ Å, $K_\beta = 1.497$ Å)

N. d'ordine	ϑ	$h_1\ h_2\ h_3$	a	Intensità osservate	Intensità calcolate colla formola (1)	Intensità calcolate colla formola (2)
1	29.9	110	4.687	f	55.5	53.4
2	37.2	101	4.697	mf	27.1	42.2
3	43.0	111	4.699	m	19.0	30.9
4	47.2	120	4.705	d	8.2	18.9
5	57.1	121	4.697	ff	60.9	60.0
6	60.6	220	4.705	m	18.2	18.8
7	63.4	002	4.705	md	13.1	8.8
8	68.6	130	4.699	d	7.4	12.2
—	—	221	—	—	1.4	6.0
9	71.2	112	4.697	mf	15.6	17,2
10	73.0	031	4.699	mf	35.8	24.8
—	—	202	—	—	2.0	5.2
—	—	131	—	—	2.7	8.7
—	—	231	—	—	4.1	9.00
11	91.0	400	4.688	d	5.0	4.7
12	93.0	222	4.690	m	17.8	13.1
13	97.7	330	4.687	d	11.7	14.2
14	100.3	132	4.685	md	9.7	15.8
15	101.8	141	4.693	md	17.8	21.5
—	—	103	—	—	3.9	7.0
16	105.0	420	4.685	d	8.1	10.0
17	123.2	402	4.690	m	12.2	14.1
18	132.0	332	4.691	md	36.8	25.1
19	134.9	501	4.688	d	0.9	3.9
20	142.5	422	4.697	mf	30.2	33.4

Procedendo in modo analogo al caso precedente di FeF_2 dai dati della tabella II, si ricavano i valori delle costanti che individuano il reticolo del fluoruro di cobalto. Essi sono

$$a = 4.695 \pm 0.003 \text{ Å} \qquad c = 3.193 \text{ Å}$$

il rapporto assiale $\frac{c}{a} = 0.680 \pm 0.001$ e il volume della cella elementare 70.38 Å^3. La densità calcolata è

$$d = \frac{2 \times 96.97 \times 1.66 \times 10^{-24} \text{ gr.}}{70.38 \times 10^{-24} \text{ cm.}} = 4.574$$

quella sperimentale 4.43 (1).

Il calcolo delle intensità dà valori in buon accordo con quelli osservati, la scelta del parametro fra $x = 0.31$ e $x = 0.32$ è incerta.

Fluoruro di nichel, NiF_2. Ho sottoposto dapprima all'esame röngtenografico un prodotto di Kahlbaum. Il fotogramma con linee deboli e vicine limitate solo alla parte centrale della pellicola, mostra già a colpo d'occhio che ci trovavamo in presenza di un reticolo con cella elementare assai grande, probabilmente a bassa simmetria. Questo reticolo non era certamente quello tipo rutilo che appariva probabile ritrovare per il fluoruro di nichel anidro; ma quello del sale idrato.

Infatti che il sale contenesse acqua di cristallizzazione si riconosceva facilmente al semplice riscaldamento per l'abbondante sviluppo d'acqua.

I risultati dell'analisi di questo prodotto eseguita precipitando il nichel con dimetilgliossima sono:

	Ni trovato		Ni calcolato per	
	I	II	$NiF_2\ 3H_2O$	$NiF_2\ 4H_2O$
in 100 parti	33.55	33.64	38.97	34.78

Da questi valori apparirebbe che questo prodotto si avvicini alla composizione $NiF_2 \cdot 4H_2O$; però nella letteratura non si trovano citati che i sali idrati $NiF_2 \cdot 2H_2O$ e $NiF_2\ 3H_2O$. Per disidratare questo prodotto lo mantenni per 24 ore a 130°. In queste condizioni si osserva un cambiamento notevole di colore; da verde chiaro la tinta passa ad un giallastro. L'analisi di questo composto mostra in modo indubbio la perdita di una quantità notevole d'acqua, e la composizione si avvicina molto a quella del sale anidro:

in 100 parti Ni calcolato 60.69 trovato 59.09.

(1) Landolt, cit., 300.

Fotografato questo composto, si dimostra amorfo. Infatti, durante la disidratazione a bassa temperatura, il reticolo preesistente del sale idrato era stato distrutto, e le particelle del sale anidro non si erano ancora potute orientare in granuli sufficientemente grossi per dare delle linee sul fotogramma. Ho allora mescolato questo prodotto con fluoruro acido d'ammonio e riscaldato in crogiuolo di platino a bagno d'aria per circa un paio d'ore. L'analisi dopo questo trattamento dà:

in 100 parti Ni calcolato per NiF_2 60.69 trovato 60.51

Il prodotto così disidratato dà ora un magnifico fotogramma corrispondente al reticolo del fluoruro di nichel anidro, che si ordina perfettamente nel diagramma predetto di Hull, come appare dalla tabella III secondo una cella tetragonale di rapporto assiale $c/a = 0.662 \pm 0.002$. L'andamento delle intensità s'accorda come pei casi precedenti con quelle calcolate per il tipo « rutilo ». I valori dati nella tabella sono ottenuti assumendo come valore del parametro $x = 0.31$.

Le dimensioni della cella sono:

$$a = 4\,710 \pm 0.005\ \text{Å} \qquad c = 3.118\ \text{Å} \qquad V = 69.17\ \text{Å}^3.$$

La densità che si calcola è:

$$d = \frac{2 \times 96.69 \times 1.66 \times 10^{-24}\ \text{gr.}}{69.17 \times 10^{-24}\ \text{cm.}} = 4.641$$

in buonissimo accordo con la sperimentale 4.63 [1].

Fluoruro di zinco, ZnF_2. A differenza del caso dei tre fluoruri precedenti si aveva per questo composto qualche indicazione cristallografica; così nel Gmelin, Handbuch d. an. Chemie, 8ª Edizione (1924), parte 32, p. 157, si trova:

« Il fluoruro di zinco anidro si presenta in cristalli trasparenti, incolori, sovente in forma d'aghi, che appartengono al sistema monoclino oppure a quello triclino ».

Per lo studio del reticolo del fluoruro di zinco mi sono servito del prodotto di Kahlbaum, dopo averlo sottoposto come nei casi precedenti al riscaldamento con fluoruro acido d'ammonio [2]. L'analisi di questo prodotto eseguita precipitando lo zinco come fosfato zinco-ammonico e pesandolo come pirofosfato diede:

in 100 parti Zn calcolato 63.24 trovato 62.27.

(1) Landolt, cit., 304.

(2) Il prodotto di Kahlbaum non corrispondeva prima del trattamento con fluoruro d'ammonio alla composizione del fluoruro anidro. Infatti l'analisi diede:

in 100 parti: Zn calcolato per ZnF_2 63.25; trovato 52.05

probabilmente era anch'esso idrato.

TABELLA III - NiF_2

(diam. prep. 1 mm. – ant. di Ni $K_\alpha = 1.656$ Å, $K_\beta = 1.497$ Å)

N. d'ordine	δ	$h_1\ h_2\ h_3$	a	Intensità osservate	Intensità calcolate colla formola (1)	Intensità calcolate colla formola (2)
1	29.65	110	4.727	f	59.5	55.3
2	37.85	101	4.732	mf	29.1	43.4
3	43.60	111	4.725	md	18.3	30.0
4	46.95	210	4.736	d	8.2	18.7
5	57.15	121	4.741	ff	63.7	60.7
6	60.15	220	4.730	m	19.3	15.8
7	64.75	002	4.735	m	12.2	8.5
8	68.00	130	4.725	d	8.3	12.7
9	73.15	112	4.700	f	53.2	41.7
		031	4.720			
—	—	202	—	—	2.1	5.3
10	87.30	231	4.717	d	4.8	9.6
11	94 60	222	4.685	m	24.7	20.7
		140	4.665			
12	97.50	330	4.703	d	12.3	16.0
13	101.90	132	4.690	mf	30.3	36.7
		141	4.705			
—	—	421	—	—	5.4	12.2
—	—	113	—	—	5.3	8.9
14	127.0	402	4.670	m	14.8	15.6
15	136.0	332	4.652	mf	44.6	40.4
		501	4.670			
—	—	—	—	—	—	—
—	—	—	—	—	—	—

TABELLA IV - ZnF_2

(diam. prep. 1 mm. – ant. di Cu $K_\alpha = 1.540$ Å, $K_\beta = 1.389$ Å)

N. d'ordine	δ	$h_1\ h_2\ h_3$	a	Intensità osservate	Intensità calcolate colla formola (1)	Intensità calcolate colla formola (2)
1	27.7	110	4.715	f	69.2	59.5
2	35.2	101	4.710	f	36.8	48.1
3	40.1	111	4.710	md	19 0	30.5
4	43.6	210	4.711	d	8.4	18.8
5	53.0	121	4.720	ff	75.0	66.3
6	55.8	220	4.720	m	22.3	17.1
7	59.8	002	4.718	m	14.7	9.2
8	63.0	130	4.713	md	10.3	14.6
9	67.0	112	4.691	f	60.2	45.7
		031	4.728			
10	73.0	202	4.720	d	3.0	6.6
11	80.0	231	4.715	md	6.2	11.9
12	85.5	222	4.710	m	25.0	19.6
		140	4.700			
—	—	330	—	—	12.2	13.9
13	91.8	132	4.708	m	31.1	31.0
		141	4.730			
14	101.0	421	4.718	d	4.0	9.0
15	104.8	113	4.718	d	4.8	6.5
16	110.8	402	4.700	md	10.4	11.2
17	118.6	332	4.695	d	29.4	22.4
		501	4.714			
18	125.0	422	4.700	m	23.2	16.4
19	133.0	521	4.708	mf	56.9	43.5

Per mancanza di spazio nelle tabelle sono dati solo i valori delle intensità calcolate col parametro $x = 0.31$ sebbene la scelta sia talvolta incerta. In ciascun fotogramma si ritrova solo una linea dovuta a radiazione K_β. Questa linea non compare nelle sopra riportate tabelle e corrisponde per tutti i quattro fotogrammi alla faccia 121 comparendo rispettivamente per FeF_2 all'angolo $\delta = 61.0°$ per CoF_2 a 51.3°, per NiF_2 a 51.25° e per ZnF_2 a 47.5°. Esse sono tutte deboli.

Il fotogramma ottenuto con anticatodo di rame da questo prodotto, mostra subito dal numero delle linee non molto grande l'impossibilità che possa corrispondere ad un reticolo a simmetria così bassa come vorrebbe la citazione del Gmelin. Esso infatti si ordina perfettamente come lo mostra la tabella IV, in un reticolo estremamente simile a quello del fluoruro di nichel. Le costanti che si ricavano sono infatti:

$$a = 4.715 \pm 0.005 \text{ Å} \qquad c = 3.131 \text{ Å}$$

il rapporto assiale $c/a = 0.664 \pm 0.001$ ed il volume 69.60 Å^3.

La densità che si calcola:

$$d = \frac{2 \times 103.38 \times 1.66 \times 10^{-24} \text{ gr.}}{69.60 \times 10^{-24} \text{ cm.}} = 4.932$$

si accorda col valore sperimentale 4.84 [1].

Anche il confronto fra le intensità calcolate e osservate non lascia dubbi sul ritrovarsi nel fluoruro di zinco, dello stesso reticolo tipo « rutilo » già osservato per parecchi altri fluoruri.

L'accordo migliore è anche in questo caso quello ottenuto impiegando la formola (1) come si verifica anche nei casi precedenti. Rispetto al parametro non si può scegliere sicuramente fra i valori 0.31 e 0.32; le intensità calcolate nella tabella IV sono ottenute assegnando al parametro il valore 0.31.

Se la citazione del Gmelin-Kraut non è errata, dovremmo quindi trovarci in presenza di un dimorfismo del fluoruro di zinco. Tentativi di ottenere l'altra forma ho fatto con esito finora negativo. Per ora l'esame röngtenografico dimostra nel modo più sicuro l'esistenza di una forma tetragonale di fluoruro di zinco isomorfa con molti altri fluoruri bivalenti. Completerò lo studio di questi fluoruri dei metalli bivalenti.

Le analisi riportate sono state eseguite dal distinto allievo G. Aymar che ringrazio vivamente.

Riassumendo: I fluoruri di ferro, cobalto, nichel e zinco presentano il medesimo reticolo cristallino tetragonale, tipo « rutilo ».

Le dimensioni delle loro celle contenenti due molecole sono:

	$a =$	$c =$	$c/a =$	$V =$	dens. calc.	dens. nota
FeF_2	4.670 Å	3.297 Å	0.706	71.91 Å^3	4.333	4.09
CoF_2	4.695 »	3.193 »	0.680	70.38 »	4.574	4.43
NiF_2	4.710 »	3.118 »	0.662	69.17 »	4.641	4.63
ZnF_2	4.715 »	3.131 »	0.664	69.60 »	4.932	4.84

(1) Landolt, cit. 312.

Chimica. — *Un nuovo esempio di cristalli misti anomali.* Nota del dott. V. CAGLIOTI [1], presentata [2] dal Socio FERRUCCIO ZAMBONINI.

Secondo la definizione classica dell'isomorfismo, dovuta al Mitscherlich, i composti chimici isomorfi possiedono formula chimica analoga. Questa espressione non è, certo, molto rigorosa, tanto che si sono considerate come formule chimiche analoghe quelle dei solfati, seleniati e cromati R_2XO_4 (X = S, Se, Cr) e quelle dell'albite e dell'anortite, che sono, rispettivamente, $NaAlSi_3O_8$ e $CaAl_2Si_2O_8$. Col progredire degli studi, il numero dei composti isomorfi che non avevano composizione chimica esprimibile mediante lo stesso tipo di formula è andato sempre aumentando, specialmente dopo che, per opera di vari sperimentatori, fra i quali ha un posto eminente il Bruni, fu accertato l'isomorfismo di composti organici nei quali risultavano isomorfogeni gruppi costituiti da numero diverso di atomi, sicchè era assolutamente impossibile il ricondurre le formule di quei composti non solo ad uno stesso tipo, ma addirittura a formule con lo stesso numero di atomi.

Si propose da taluno, come, per esempio, da Arzruni, di chiamare *miscele morfotropiche*, in contrapposto alle miscele isomorfe tipiche, quelle tra composti a formula diversa, come l'albite e l'anortite; Muthmann [3] distinse col nome di *simmorfe* certe sostanze che, pur non presentando somiglianze nella forma cristallina, sono, tuttavia, in grado di formare cristalli misti. In realtà, però, i casi di simmorfismo studiati da Muthmann si possono ricondurre o a comuni esempi di isodimorfismo, oppure a quei casi, definiti più tardi dal Bruni, di sostanze nelle quali determinati gruppi di atomi vengono sostituiti da altri, che sono, complessivamente, in numero diverso.

Hanno, però, assunto sempre una particolare fisionomia quei casi di miscibilità allo stato solido fra sostanze che non presentano alcuna relazione, nè cristallografica, nè chimica, come accade per quelle sostanze coloranti che entrano negli edifici cristallini di svariati composti (esempio classico ed antico è quello scoperto dal de Sénarmont fra il nitrato di stronzio e la tintura di campeggio). È merito del Marc l'aver riconosciuto trattarsi di un processo di assorbimento, che segue la nota legge esponenziale $a : Kl^{1/n}$, indicando con a la quantità assorbita da una determinata

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto di Chimica Generale della R. Università di Napoli.
(2) Nella seduta del 7 marzo 1926.
(3) « Zeitschr. für Kryst. », 1891, XIX, 365.

superficie, *l* quella che rimane in soluzione, K e *n* delle costanti. Di recente, poi, F. Paneth con i suoi collaboratori ha stabilito che le sostanze coloranti vengono assorbite tutt'al più in istrato monomolecolare.

Per i cristalli misti di sostanze coloranti e di composti cristallizzati si è introdotto il nome di *miscele anomale*, che si è esteso, ad opera, sopra tutto, del Johnsen [1], a tutti i cristalli misti di componenti senza nessuna analogia chimica.

Un importante gruppo di tali cristalli misti è dato da quelli che il cloruro di ammonio forma con svariati altri cloruri.

Già nel 1883 il Lehmann [2] riscontrava che soluzioni di $FeCl_3$, $MnCl_2$, $CdCl_2$, $CuCl_2$, $NiCl_2$, $CoCl_2$, mescolate con NH_4Cl, davano, per raffreddamento, cristalli misti contenenti circa il 3 % di tali cloruri.

Retgers [3] descrisse poi, cristalli misti ottenuti da soluzioni di NH_4Cl con $CrCl_3 \cdot 6H_2O$ verde: essi, secondo Johnsen [4], contengono 6.15 % di $CrCl_3 \cdot 6H_2O$. Quest'ultimo autore riscontrò analogo comportamento anche per $SnCl_2$ e $ZnCl_2$.

A questa serie, io posso aggiungere i cristalli misti di NH_4Cl con $CeCl_4$ che ho trovati nel corso di alcune ricerche dirette a preparare il composto $(NH_4)_2CeCl_6$ e a stabilirne le relazioni coi corrispondenti sali di $Pb^{\cdots\cdot}$, di $Sn^{\cdots\cdot}$, di Ti e Th.

Operavo nel modo seguente: sottoponevo ad una corrente di cloro la sospensione di $Ce(OH)_3$ ottenuta precipitando con KOH circa due grammi di $CeCl_3$. L'idrato cerico, così ottenuto, filtrato e lavato alla pompa, si scioglieva in HCl diluito. In un primo tempo, appariva la colorazione rosso-aranciata caratteristica del complesso $(CeCl_6)^{\cdot\cdot}$, ma, dopo pochi minuti, questa scompariva, lasciando una leggera colorazione gialletta, mentre dalla soluzione si svolgeva cloro.

Il complesso $(CeCl_6)^{\cdot\cdot}$, infatti, non è stabile in presenza di acqua, data l'azione idrolitica del mezzo: esso permane soltanto in solventi inerti, e, nelle migliori condizioni, in alcool metilico.

S'aggiungeva, quindi, la quantità di cloruro d'ammonio, calcolata per la formazione del sale $(NH_4)_2CeCl_6$ e 1 grammo di $(NH_4)_2SnCl_6$ sciolto nella minore quantità possibile d'acqua.

Il tutto era posto a cristallizzare in essiccatore ad H_2SO_4 a pressione ridotta: per successive concentrazioni si sono avuti tre depositi differenti: il primo, assolutamente bianco, costituito da cristallini cubici, è risultato all'analisi composto di $(NH_4)_2SnCl_6$ senza tracce di Ce; il secondo, poco omogeneo, era costituito da cristalli bianchi di $(NH_4)_2SnCl_6$, senza alcuna birifrangenza.

(1) « Neues Jahrbuch für Mineralogie, etc. » (1903), II, 93.
(2) « Zeit. für Kr. », 8 (1883), 438; « Molekularphysik », 1 (1883), 427.
(3) « Zeit. für physik. Chem. », 9 (1892), 390.
(4) Loc. cit.

Qua e là, però, specie agli spigoli, si notavano dei punti gialli; ma data la inomogeneità del deposito, esso non è stato sottoposto all'analisi.

Il terzo deposito, finalmente, era costituito da cristallini gialli, omogenei. È notevole che, concentrando man mano le acque, il liquido diventa sempre più gialletto, il che dimostra che, almeno in parte, una certa ossidazione del cerio è avvenuta e permane. I cristallini hanno una bellissima tinta giallo aranciata, visibilmente uniforme. Con l'aiuto di una forte lente essi sono stati scelti uno per uno, asciugati con cura fra carta, e sottoposti all'analisi.

I risultati ottenuti sono:

$$\begin{aligned} Ce &= 0.98\,\% \\ Cl &= 65.80\,\% \\ NH_4 &= 33.10\,\% \end{aligned}$$

Ho determinato anche il peso specifico, col metodo della sospensione in ioduro di metilene e toluene, ed ho ottenuto:

$$D_{18°} \begin{cases} 1.535 \\ 1.537 \end{cases} 1.536.$$

Esso è pressochè identico al peso specifico del cloruro ammonico puro che è 1.532, ma è però, sia pure per pochissimo, nettamente più elevato.

Osservati al microscopio, i cristallini appaiono formati da cubi e non presentano alcuna birifrangenza per anomalia: il cerio è senza dubbio contenuto allo stato cerico, dato il colore giallo-arancio caratteristico per tale grado di ossidazione.

Sulla natura di questi cristalli, dai dati analitici poco si può dedurre: essi, infatti, possono essere costituiti sia da 1.96 % di $CeCl_4$ e 98.04 % di NH_4Cl, sia da 2.71 % di $(NH_4)_2CeCl_6$ e 97.29 % di NH_4Cl.

Nell'un caso e nell'altro, si calcola:

	Cercato	Trovato
Cl	= 65.96	65.80
NH_4	= 33.06	33.10

La stessa incertezza si ritrova del resto per tutti i casi sopra citati, di cristalli misti fra il cloruro di ammonio e svariate altre sostanze.

La questione, aperta per il NH_4Cl ferrifero da Roozeboom [1] che restò incerto se ammettere come uno dei componenti il sale di Fritsche [2] $2NH_4Cl \cdot FeCl_3 \cdot H_2O$ o l'idrato $FeCl_3 \cdot 4H_2O$, venne ripresa da Mohr [3] e

(1) « Zeit. für physik. Chem. », 10 (1892), 145.
(2) « J. f. prakt. Chem. », 18 (1893), 483.
(3) « Zeit. f. physik Chem. », XXVIII (1898), 193.

da Schroeder van der Kolk ed estesa infine da Johnsen (loc. citato) a tutti i tipi di cristalli misti sopra ricordati, senza, però, stabilire se componenti di tali miscele siano i sali semplici o il cloruro di ammonio con un composto da essi formato.

Nel caso particolare del cloruro ammonico cerifero, non si conoscono le proprietà del cloruro cerico che, finora, non è stato mai preparato allo stato solido, nè se ne conoscono sali doppi col cloruro d'ammonio, ove si eccettui un cenno incerto ad un sale $(NH_4)_2CeCl_6$ preparato da Koppel [1] e di cui non sono date le proprietà chimiche e cristallografiche.

È impossibile, perciò, poter decidere quale dei due sali sia in soluzione solida col NH_4Cl, dato inoltre che i cristalli misti si presentano assolutamente anidri.

Se, come appare da altre mie ricerche collaterali, il sale $(NH_4)_2CeCl_6$ è veramente cubico, è verosimile, date le proprietà cristallografiche dei cristalli misti, che sia questo sale uno dei loro componenti. In tal caso, saremmo ricondotti ad un caso semplice, e ben noto, di cristalli misti fra un sale doppio ed uno dei suoi componenti.

Mineralogia. — *Osservazioni sulla vulfenite e vanadinite di Oudida (Marocco)* [2]. Nota di P. Comucci, presentata [3] dal Socio F. Millosevich.

Dal Prof. G. Stefanini furono gentilmente messi a mia disposizione un campione di vulfenite e uno di vanadinite, provenienti dai dintorni di Oudida (Marocco orientale): disgraziatamente non è stato possibile avere una determinazione topografica più precisa. Giacimenti di questi due minerali e di altri piombiferi sono stati accuratamente descritti per questa località da M. I. Barthoux [4]: ho creduto bene pubblicare nonostante il resultato delle mie osservazioni, perchè dal lato mineralogico posso aggiungere qualche ulteriore notizia e dal lato chimico dare una nuova analisi di questi due minerali dei quali il predetto autore fornisce analisi industriali, da esso ritenute incomplete.

Il campione di vulfenite presenta impiantati bei cristalli arancioni o giallo-miele secondo la grandezza, anche di dimensioni superiori al centimetro, tabulari secondo la base, con paragenesi di piromorfite in forma di ricoprimento verdastro con cristallizzazione indistinta, {001} è predominante e limitata da facce di piramide di 1° e 2° ordine allungate parallelamente

(1) « Zeit. an. Chem. », XXVIII (1898), 305.
(2) Lavoro eseguito nell'Istituto di Mineralogia della R. Università di Firenze.
(3) Nella seduta del 17 gennaio 1926.
(4) « Bul. Soc. Franç. Miner. », vol. XLVII, p. 36.

allo spigolo di combinazione con {001} ma sottili in senso perpendicolare: ne risulta così un abito tabulare estremamente semplice e povero, ma l'osservazione goniometrica ha permesso rilevare esigue faccette che rendono questi cristalli alquanto notevoli. Le forme osservate sono:

{001} {0·1·16}* {0·1·13}? {012} {0·3·7}** {0·1·1} {113} {6·6·13}** {111} {1·5·62}** {19·1·248}** {15·23·2}** {8·13·22}** (1).

Manca dunque nei miei cristalli qualunque rappresentante della zona dei prismi, di cui nei cristalli studiati da M. I. Barthoux si hanno due forme {110} {530}, minor numero di piramidi di 1° ordine, delle quali quattro forme conosciute sono state potute determinare nello studio citato; invece ho osservato delle piramidi di 3° ordine, nuove non soltanto per il giacimento, ma anche per la specie.

I cristalli studiati sono 15 scelti fra i piccoli e nitidi; pur tuttavia si hanno frequenti facce vicinali, specialmente intorno a {001}, e angoli anormali tanto che in certi cristalli rimane dubbio l'orientamento, perchè, essendo nella zona delle piramidi di 2° ordine predominante {012} inclinata di 38° 16′ sulla base e in quelle di primo ordine {113} inclinata su {001} di 36° 38′, avviene che l'angolo di quest'ultima presenta talvolta valori più alti del teorico e quelli di {012} più bassi, onde può risultare indecisione sull'ordine di una zona di piramidi presa isolatamente. Perciò nell'accettare forme nuove ho procurato di assicurarmi dell'identificazione delle zone non solo in base al valore degli angoli, ma anche dal complesso delle forme concomitanti. Fra le due zone di piramidi di 1° e 2° ordine, determinanti con {001} l'abito del cristallo, è predominante la zona di 2° ordine sia per la sua frequenza, sia per grandezza delle facce appartenenti.

{001} ha le dimensioni di lunghezza e larghezza del cristallo a cui appartiene e che possono essere relativamente ragguardevoli: in questo caso vi si scorgono divisioni di facce vicinali. L'immagine goniometrica è distorta e multipla ma in generale una delle immagini, buona, predomina sopra le altre; buon parallelismo fra le due facce opposte, cosicchè si può prenderle come faccia di riferimento.

Fra le piramidi di secondo ordine è di gran lunga la più frequente {012} ben visibile sul cristallo e ne determina lo spessore.

L'immagine goniometrica è frequentemente multipla, talvolta una fascia luminosa estendentesi anche per l'ampiezza di 3° gradi. Spesso questa faccia presenta un angolo molto minore del normale, tanto che su 52 osservazioni, mentre 36 hanno dato una media di 38° 22′, 16 oscillano intorno a 37° 40′.

(1) Le forme segnate con un asterisco sono nuove per il giacimento, quelle indicate con due asterischi sono nuove anche per la specie.

Ho notato su di esse talvolta una striatura parallela allo spigolo {012}: {001}.

Delle altre piramidi di questo ordine {011} si presenta sempre con apparenza di faccettina piccola, anche lucente, non molto comune, {0.1.16}, nuova per questo giacimento, fu notata una sola volta, ma con ottimo accordo angolare: invece do per incerta {0.1.13} osservata una sola volta con immagine debolissima a 6° 32′ dalla base, mentre il calcolo richiede 6° 55′. È da aggiungere {0.3.7} nuova, per quanto mi consti, anche per la specie, osservata due volte in questa zona come faccetta distinta, a cui, d'altra parte, compete simbolo semplice. La sua inclinazione su {001} è 34° 12′ contro il teorico 34° 3′, lontano peraltro da 38° 16′ richiesto per {012}.

Nella zona delle piramidi di 1° ordine {113} e {111} presentano uguale frequenza, ma {111} ha sviluppo subordinato e comparisce sotto forma di lista lucente, pure con immagini buone. Essa è anche faccia di sfaldatura e come tale costituisce superfici di rottura, talvolta nettissime anche all'osservazione goniometrica. Come facce di sfaldatura meno perfette sono indicate anche {001} e {113}: credo meritare menzione a questo proposito l'avere incontrato anche una faccia di {011}, che per la sua ubicazione sul cristallo aveva tutta l'apparenza di una faccia di sfaldatura. {113} comparisce il più delle volte come faccia triangolare a troncare gli spigoli di due facce di {012}. L'inclinazione di {113} su {001} presenta oscillazioni meno frequenti che {012} tanto che le 18 osservazioni di essa sono abbastanza concordanti. Come faccia nuova per la specie spettante a questa zona, ho determinato {6.6.13} osservata due volte con immagine goniometrica delimitata ed isolata, alla quale corrisponde una faccetta listiforme.

D'altra parte il simbolo è abbastanza semplice e non si può ritenere senz'altro vicinale di {112}, perchè quest'ultima secondo il calcolo è inclinata di 48° 7′ su {001}, mentre per questa faccia l'inclinazione ha il valore medio di 45° 40′; inoltre nemmeno {112} è data, per quanto sappia, fra le forme note.

Ho da aggiungere quattro nuove piramidi alle quali è forza ascrivere simboli elevati. Già nel mio caso particolare in {037} e {6.6.13} si nota la tendenza a sostituire simboli complicati a quelli semplici, ma nella letteratura troviamo altri esempii. S. Koch [1] dava come forma nuova {1.0.264} riportata anche nel trattato del Dana. Nel 1896 Artini [2] trovava nella vulfenite di Gorno (Valseriana) {5.1.65} e nonostante buone misure appunto per il simbolo la dava come non certa, ma ne ammetteva più tardi sicura l'esistenza, perchè la ritrovava (1902), sempre con buon accordo angolare, nella vulfenite presente fra i minerali di Laorca e Ballabio (Val-

(1) « Zeit für Krystall » VI, p. 394 (1882).
(2) « Atti. Soc. It. S. N. », vol. 35.

sassina) [1]. B. K. Emerson [2] indica {7.1.75} per la vulfenite di Londville, e F. N. Guild [3] trova nella vulfenite dell'Arizona {1.7.81} {1.9.254}.

Per il giacimento di cui mi occupo, anche M. I. Barthoux accenna all'esistenza di forme di questo tipo. È dunque chiaro che, se in molti anni questi casi si sono moltiplicati senza poter proporre nuove formulazioni permettenti semplificazione, la vulfenite appartiene a quel gruppo di minerali, non molto numeroso, che pur presentando simboli semplici per la maggior parte delle loro forme, ne presentano alcune a simbolo alto irreducibile, non certo in accordo con la legge di razionalità, nel cui spirito sta indiscutibilmente che gli indici non solo siano interi, ma semplici.

La piramide più frequente è {1.5.62} incontrata sei volte e visibile anche a occhio nudo, come quattro triangoli obliqui sugli spigoli fra {001} e {012}, con la disposizione asimmetrica richiesta per la forma. I due angoli che la determinano danno accordo soddisfacente con i valori teorici.

{15.23.2} fu per vero osservata una sola volta: però con una faccia grandetta ben visibile anche macroscopicamente e la sua distanza angolare dalle forme contigue non permette confusione con altra forma.

{8.13.22} fu osservata una sola volta come faccia delle dimensioni della forma contigua {012}, quindi senza nessun dubbio della sua reale esistenza.

{19.1.248} è determinata mediante tre angoli soddisfacentemente concordanti con il calcolo. Il cristallo che la presenta aveva una grande faccia {001} divisa in due parti, una più alta ed una più bassa (due cristalli in accrescimento parallelo) e riunite da una faccia a striscia piuttosto larga con l'orientazione della piramide superiore, e quindi adatta per la misura dell'inclinazione sulle facce circostanti.

Il simbolo di questa forma non è molto lontano da {1.0.13}, ma risulta dal calcolo che la zona {19.1.248}: {001} dista di 3° 28′ dalla zona {001}: {100} a cui dovrebbe appartenere {1.0.13} e per di più l'angolo fra {113} e {1.0.13} è 37° 11′. Invece non si può disconoscere che {19.1.248} non è lontana da {1.9.254} indicata da Guild, la quale peraltro è la forma sinistra [4].

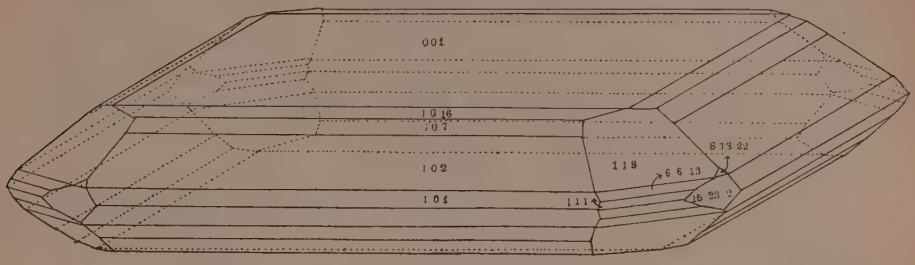
Unisco un prospetto delle misure goniometriche confrontate con i valori teorici ricavati dal rapporto parametrale:

$$a : c = 1 : 1{,}5771 \text{ (Dauber) [5].}$$

Non credo conveniente calcolare un nuovo rapporto, perchè l'angolo {001}: {012} che si presterebbe indirettamente non ha la costanza richiesta.

(1) E. Artini, « Zeit für Crystall », vol. 35, p. 309.
(2) « Zeit für Crystall », vol. 28, p. 504.
(3) « Zeit für Crystall », vol. 49, p. 326.
(4) Loc. cit.
(5) Pogg. « Ann. » vol. 107, p. 267 (1859).

La figura qui unita riunisce quasi tutte le forme osservate ridotte alquanto più simmetriche, pur mantenendo l'abito tabulare.



Angoli misurati	Num.	Limiti delle osservazioni	Medie	Valori calcolati	Differenze
001 : 0·1·16	1	—	5° 39′	5° 38′	+ 1′
001 : 012	36	38° – 38° 57′	38° 22′	38° 16′	+ 6′
001 : 011	4	57° 3′ – 58° 3′	57° 25′	57° 37′	— 12′
001 : 037	2	34° 2′ – 34° 23′	34° 12′	34° 3′	+ 9′
001 : 113	18	36° 6′ – 36° 56′	36° 32′	36° 38′	— 6′
001 : 6·6·13	2	45° 34′ – 45° 47′	45° 40′	45° 49′	— 9′
001 : 111	19	65° 11′ – 65° 58′	65° 43′	65° 51′	— 8′
001 : 1·5·62	6	7° 20′ – 7° 57′	7° 34′	7° 24′	— 10′
012 : 1·5·12	2	31° 10′ – 31° 25′	31° 17′	31° 3′	+ 14′
001 : 19·1·248	1	—	6° 45′	6° 54′	— 9′
113 : 19·1·248	1	—	31° 35′	31° 47′	— 12′
012 : 19·1·248	1	—	38° 11′	38° 25′	— 14′
001 : 15·23·2	1	—	87° 19′	87° 21′	— 2′
012 : 15·23·2	1	—	56° 34′	56° 21′	+ 13′
001 : 8·13·22	1	—	47° 10′	47° 34′	— 24′
012 : 8·13·22	1	—	23° 30′	23° 13′	+ 17′

Per l'analisi del minerale ho prelevato circa mezzo grammo di materiale puro e l'ho disciolto in acido nitrico diluito, il che si ottiene ado-

prando acido nitrico assai diluito e poi evaporando a bagnomaria fino alla concentrazione giusta, che dà soluzione totale senza idrolisi del sale di molibdeno. Si precipita quindi con solfuro ammonico con lunga digestione a bagnomaria: il molibdeno rimane in soluzione come solfosale e il piombo si separa come solfuro ma trascina del molibdeno, del che ci se ne accorge perchè, quando il solfato di piombo ottenuto dal solfuro si concentra in soluzione solforica fino a formazione di fumi bianchi, si vede la colorazione azzurra, indizio sensibile di molibdeno: si ovvia a tale difficoltà, ripetendo il trattamento con solfuro ammonico.

Il molibdeno fu separato dai liquidi liberi di piombo precipitando ripetutamente, in corrente di H_2S, la soluzioue calda e successivamente concentrata.

I risultati analitici sono i seguenti:

	Trovato	Calcolato per MoO_4Pb
M_oO_3	38.87	39.3
PbO	60.91	60.7
	99.78	100.0

In questo minerale è stato segnalato il cromo [1].

Ho pure io ricercato nel mio campione il cromo, il quale, se presente, doveva precipitare, nel trattamento con solfuro d'ammonio, come idrato insieme al solfuro di piombo, e quindi rimanere nei liquidi di separazione del piombo contenenti H_2SO_4. Ad ogni modo tutti i liquidi residui dell'analisi furono raccolti e concentrati, alcalinizzati e poi ossidati con bromo, ma con esito negativo per la presenza del cromo.

Il campione di vanadinite è formato da un intreccio di cristalli esagonali con l'aspetto caratteristico ruiniforme, disegnato anche nel trattato del Dana. Oltre la base e il prisma {1010} ho notato anche {1011}, e il prisma {1120}, ma il materiale è quanto mai inadatto a misure goniometriche; invece fornisce materiale abbondante e puro per l'analisi.

Circa un grammo di sostanza fu disciolta in acido nitrico diluito a freddo per prolungato contatto, a fine di evitare perdite di acido cloridrico. Il cloro fu precipitato con nitrato d'argento, il cloruro di argento disciolto in ammoniaca e di nuovo precipitato. Quindi il liquido fu liberato dall'argento mediante acido cloridrico e poi tirato a secco in presenza di acido cloridrico per eliminare l'eccesso di acido nitrico; quindi fu precipitato il piombo con acido solforico e lasciato digerire per trasformare tutto il cloruro di piombo: così il piombo fu pesato come solfato.

(1) B. K. Emerson, loc. cit., O. Sussmann, « Zeit für Krystall », vol. 38, p. 316.

Il filtrato fu trattato con corrente di acido solfidrico per separare l'arsenico ed ebbi un tenue precipitato che pesai sul filtro; quindi trattai il precipitato sul filtro con ammoniaca per sciogliere il solfuro di arsenico e lasciare indietro lo zolfo eventuale. Ripesato il filtro, la differenza rappresenta il peso della piccola quantità $As_2 S_3$.

Il composto vanadico e l'acido fosforico eventuale, rimasti nel liquido, sono raccolti, evaporando fino a secchezza ed eliminando l'acido solforico. La pesatura fu fatta in crogiuolo di platino con debole arroventamento, raccogliendo nel crogiuolo il prodotto d'evaporazione e togliendo con ammoniaca che discioglie l'acido vanadico, le piccole quantità rimaste attaccate al recipiente ove fu fatta l'evaporazione.

La separazione dell'acido vanadico dall'acido fosforico fu fatta su un campione a parte, attaccato con 6 parti di carbonato sodicopotassico e una parte di nitrato di potassio. La fusione fu ripetuta sul prodotto della prima disgregazione per maggior sicurezza. Il filtrato ottenuto riprendendo con acqua fu acidificato con acido solforico e ridotto con anidride solforosa: quindi precipitato con molibdato ammonico, e il precipitato, disciolto in ammoniaca, fu di nuovo separato con il reattivo molibdico e il prodotto di separazione disciolto in ammoniaca fu poi precipitato con mistura magnesiaca.

I resultati analitici sono i seguenti:

PbO	76.18	PbO	60.08
V_2O_5	20.34	$PbCl_2$	10.10
Cl	2.58	V_2O_5	20.34
As_2O_5	0.39	As_2O_5	0.39
P_2O_5	0.41	P_2O_5	0.41
Residuo insolubile	0.22	Residuo insolubile	0.22
			99.54

Per le formule $(VO_4)_3\, Pb_4\, (PbCl)$ si calcola V_2O_5 19.4 PbO 78.7 Cl 2.5.

I due minerali hanno in conseguenza composizione chimica assai vicina alla normale.

Mineralogia. — *Sulla baritina della miniera Giona (Racalmuto)*. Nota [1] della dottoressa Carmela Ruiz, presentata [2] dal Socio F. Zambonini.

La baritina fu notata in Sicilia da lungo tempo; basti ricordare che, già più di un secolo fa, il Ferrara [3] menzionò diverse varietà di barite solfata, riferendole a parecchie località siciliane. Più recentemente Jervis [4] menziona il minerale di Novara di Sicilia e di Roccalumera (Messina), quello di Raddusa (Catania) e quello di Lercara Friddi (Palermo).

Non si hanno però, a quanto mi risulta, notizie un po' dettagliate e precise sulla baritina siciliana la quale, a quanto finora è risultato, pare si presenti per lo più in quantità limitate e scarsamente in bei cristalli; così che il De Launay dalla supposta mancanza di baritina in Sicilia [5] presume che le rocce da cui proverrebbe lo stronzio della celestite, specie assai comune invece, nella formazione gessoso-solfifera siciliana, debbano essere, contrariamente a quanto sarebbe più logico prevedere, completamente esenti da bario.

Ho quindi accolto di buon grado il consiglio del prof. Quercigh di studiare tre esemplari di questo minerale esistenti nella collezione di questo Istituto di mineralogia e derivanti dalla miniera Giona (Girgenti), che si trova sul versante meridionale del monte Cimicia, tra le argille mioceniche ed è una delle più importanti del territorio di Racalmuto. In essa il deposito solfifero, racchiuso tra i gessi, poggia sui tripoli discretamente potenti.

La costituzione del monte è quasi completamente gessosa; si accede allo strato solfifero per una lunga galleria che traversa prima argille più o meno sabbiose, probabilmente tortoniane, e poi un banco di salgemma.

In questi campioni si osservano dei cristallini più o meno completamente formati che offrono la possibilità di venir isolati e misurati e delle porzioni di minerale compatto relativamente omogeneo suscettibili di analisi e di altre determinazioni.

Il minerale si osserva su noduli di calcare compatto grigio-azzurrognolo o su marna solfifera grigiastra ed è associato a zolfo puro, ben cristallizzato in individui ad abito bipiramidale, ed a calcite in straterelli a superficie minutamente cristallina.

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto di Mineralogia della R. Università di Palermo, diretto dal prof. E. Quercigh.

(2) Nella seduta del 7 marzo 1926.

(3) Francesco Ferrara, *Storia naturale della Sicilia*. Catania, (1813) 127.

(4) Guglielmo Jervis, *I tesori sotterranei dell'Italia*, III (1881) 204, 314, 284, 229.

(5) De Launay, *Gites Minéraux* (1913) II, 209.

Si presenta sia in aggregati a cresta, costituiti da individui accentuatamente laminari secondo le facce di { 001 } le quali sarebbero completamente anche piani di contatto, se una leggera rotazione delle lamine intorno ad *y*, non le aprisse leggermente a ventaglio, come pure in incrostazioni dello spessore di alcuni mm. che hanno superficie fittamente striata per l'alterno succedersi di esilissime facce di { 102 }; ciò che svela anche qui una quasi orientazione di individui lamellari che hanno approssimativamente comuni le direzioni degli assi, di cui *x* è normale alla superficie esterna. Non è raro poi trovare degli individui, sempre molto tabulari, parzialmente liberi ed isolabili che sono per lo più trasparenti e terminati da facce piane, splendenti.

Il minerale in massa è translucido bianco-grigiastro, o giallastro con tutti i toni di passaggio al bruno, la lucentezza è vitrea caratteristica un po' ravvivata quando la superficie riflettente è costituita dall'alternarsi delle faccette di { 102 } che sono, com'è noto, tra le più brillanti in questo minerale, un po' abbassata sulla superficie molto fittamente striata fino ad annullarsi sulle porzioni matte e corrose.

La colorazione bruna non è uniformemente distribuita nemmeno in uno stesso individuo, ove non di rado si possono osservare al microscopio, attraverso la { 001 }, delle zone colorate molto più delle altre in giallastro od in bruno e nettamente limitate da quelle quasi incolori; detti limiti seguono le direzioni degli spigoli esistenti o possibili nel piano di *x y*, come in altre baritine, fra cui quella di Pettis Co., Missouri, fu già osservato [1].

Tale struttura zonata credo si debba qui attribuire ad inclusione di sostanze bituminose causata da eventuale forte aumento di queste nelle acque madri, in corrispondenza a determinati periodi di accrescimento degli individui.

È noto infatti che nella miniera Giona, come non di rado si verifica in Sicilia, lo zolfo è talvolta accompagnato da sostanze bituminose; nel caso in esame la successiva scomparsa di esse dall'ambiente circostante ai cristalli, forse in seguito a completa deposizione, è comprovata dalla quasi mancanza di colorazione negli strati più esterni di questi individui, come pure dalla assenza completa di bitume nei cristalli di zolfo e nella calcite depositatisi in seguito.

Che la colorazione bruna sia data da dette sostanze è provato, tanto dal forte caratteristico odore di bitume che le rivela quando semplicemente si polverizzi il minerale o lo si riscaldi in un tubetto, come pure dal fatto che la sostanza per forte riscaldamento imbrunisce e, per successiva calcinazione in corrente d'aria, imbianca.

In molti individui, talora in quelli opachi, si osservano anche inclusioni minutissime biancastre che risultano di carbonato di calcio.

(1) Lüdeking e Wheeler, « Am. Journ. of Sc. », 42 (1891) 495.

I frammenti, spesso con tendenza ad allungamento secondo x, degli individui isolabili, sia nelle parti scoperte del minerale, sia in quelle da cui opportunamente furono allontanati lo zolfo e la calcite sovrastanti, hanno dato, ad eccezione delle facce { 001 }, generalmente buone misure che hanno permesso non solo di identificare le ben note forme:

$$\{001\} \quad \{011\} \quad \{102\} \quad \{110\},$$

ma anche di calcolare per questa baritina, con buona approssimazione, il rapporto parametrico, che risulta:

$$a : b : c = 0.81558 : 1 : 1.31427$$

prendendo, come media delle migliori misure, rispettivamente l'angolo di 78°24′ per $110 : 1\bar{1}0$ e di 74°32′ per $011 : 01\bar{1}$.

Queste costanti sono in buon accordo con quelle trovate dai vari osservatori per la baritina in generale, specialmente con quelle di Helmacker (0.81520 : 1 : 1.31359) adottate dal Dana e dal Groth [1]; il valore $\frac{c}{b}$ si avvicina più ancora a quello che si può ottenere dalle misure di de Schulten [2] (= 1.31388) sui cristalli artificiali di $BaSO_4$ puro, mentre il rappporto $\frac{a}{b}$ in questi ultimi (= 0.81316) è invece più prossimo a quello trovato dall'Artini [3] sul minerale di Vassera (= 0.81263).

Da esse si calcola per $102 : 10\bar{2}$ l'angolo 102°16′ mentre la media trovata è di 102°15′, la differenza di 1′ fra calcolato ed osservato giustifica nuovamente il rapporto suddetto.

Le combinazioni osservate sono:

$$\{001\} \quad \{011\} \quad \{102\}$$
$$\{001\} \quad \{011\} \quad \{102\} \quad \{110\}$$

La base è sempre la più sviluppata, è anche la più comune assieme alle facce del prisma di primo ordine che sono invece molto sottili; rare e molto ridotte sono quelle di { 110 } e { 102 }.

(1) P. Groth, *Chemische Kryst.* (1908) II 388; Groth–Mieleitner, *Min. Tab.* (1921) 49.

(2) A. de Schulten, *Reprod. artif. par voie humide de la baryline, de la celestine et de l'anglesite,* « Bull. Soc. Fran. Min. », 26 (1903) 104.

(3) E. Artini, *Baritina di Vassera,* « Rivista di Min. e Crist. ital. », 16 (1896) 10.

La densità, determinata col picnometro su frammenti scelti accuratamente anche al microscopio, mi ha dato su porzioni diverse i valori: 4.418; 4.420 e 4.421 a temperature variabili fra 18° e 19°; questi risultati sono in discreto accordo con quelli trovati in generale per la baritina di altre località; l'essere un po' inferiori a quello osservato da G. Rose [1] sul minerale incolore (= 4.486) e da A. de Schulten (l. c.) sui cristalli artificiali purissimi (= 4.499' a 15°) è facilmente comprensibile con la presenza in questa baritina di lievi quantità di impurezze a densità molto minore.

Chimicamente essa è relativamente pura, contiene oltre a piccole quantità di sostanze organiche e tracce di CO_2, anche del calcio e dello stronzio, con tutta probabilità allo stato di solfati.

Eseguendo la separazione degli elementi alcalino-terrosi secondo il metodo di Rose-Stromeyer perfezionato dal Fresenius, che è considerato anche dal Treadwell [2] come il migliore, e determinando l'anione SO_3'' pure gravimetricamente allo stato di solfato di bario, la composizione del minerale mi risultò la seguente:

perdita a 115°	0.13 %
BaO	55.92
CaO	0.20
SrO	0.13
SO_3	43.44
CO_2	tracce
	99.82

L'anidride carbonica legata con tutta probabilità al calcio, proviene evidentemente da inclusioni, mentre i solfati di calcio e di stronzio possono anche trovarsi allo stato di soluzione solida, ove si accetti l'ipotesi di una possibile, benchè tuttora ignota, fase del $CaSO_4$ isomorfa con la baritina e la celestite.

Ricerche ottiche, anche precise, a cui questi cristalli non si prestano bene, non chiarirebbero, per la piccola quantità dei solfati in parola che son presenti, questo problema come si sa dalle ricerche di Beckenkamp [3] e dalla discussione dei dati successivamente acquisiti.

Ho voluto esaminare infine se il calcare e la marna su cui si sono formate le incrostazioni di baritina contenessero il bario o lo stronzio, ma i risultati furono negativi. Ciò significa che questi due elementi hanno altra origine meno vicina che sarà oggetto di successive ricerche.

(1) G. Rose in E. S. Dana, *A Syst. of Min.*, VI (1914) 902.

(2) W. D. Treadwell, *Analytische Chemie*, II (1923) II 68.

(3) Beckenkamp, *Baryt von Oberschaffhausen im Kaiserstuhl* «Zeitschr. f. Kryst.», 13 (1888) 25.

Fisiologia. — *Variazione di resistenza elettrica della ghiandola sottomascellare durante l'attività funzionale.* Nota [1] del dott. ENOCH PESERICO, presentata [2] dal Corrisp. C. FOÀ.

In questa prima parte delle mie esperienze mi son limitato allo studio delle variazioni di resistenza alla corrente continua, della ghiandola sottomascellare di cane.

Queste possono dunque essere a carico sia della resistenza ohmica, come della polarizzazione. Sono in corso le esperienze sulle variazioni di resistenza alle correnti alternate, che debbono stabilire la parte che spetta alla polarizzazione.

Metodo: - Ho adoperato il ponte di Weathstone. La corrente di misura, da uno a quattro Volt, è fornita da una batteria d'accumulatori.

Gli elettrodi applicati alle due facce della ghiandola, messa a nudo, sono impolarizzabili ed hanno una resistenza di circa 80 Ohm. ciascuno.

Per registrare le variazioni di resistenza adopero, come strumento a zero, il galvanometro di Einthoven. La corda del timpano è stimolata con la corrente faradica. La secrezione della saliva è registrata connettendo il dotto con un tamburino molto sensibile munito di penna scrivente la cui immagine viene proiettata insieme a quella del filo del galvanometro. Gli stimoli vengono registrati da un segnalino elettromagnetico la cui penna è pure proiettata sulla carta fotografica.

Risultati sperimentali [3]. — Alla stimolazione della corda del timpano segue dopo una latenza di circa 0.25″, una diminuzione di resistenza. Questa si stabilisce rapidamente e va poi lentamente scomparendo durante un periodo variabile con la durata dello stimolo. Ritorna così al valore di prima, non solo, ma continuando ad aumentare, se la ghiandola è stata prima a lungo a riposo sale di poco oltre il valore di partenza, per tornare successivamente a diminuire. Possiamo quindi distinguere tre fasi; dapprima una rapida diminuzione, poi un lento aumento, in fine una nuova diminuzione, lenta anch'essa.

L'inizio della secrezione della saliva ritarda su quello delle variazioni di resistenza, esso ha luogo durante la fase d'aumento e coincide esattamente con questa. Non appena s'inizia la terza fase, la secrezione della saliva cessa.

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto di Fisiologia della R. Università di Milano. Diretto dal Prof. Carlo Foà.

(2) Nella seduta del 7 marzo 1926.

(3) Gli elettrogrammi saranno pubblicati nel lavoro *in extenso*.

Nella ghiandola fresca l'inizio della secrezione si fa quando la resistenza, pur tendendo ad aumentare, è ancora sotto il valore di partenza. In ogni caso il massimo di resistenza è raggiunto qualche tempuscolo prima che cessi la secrezione.

Se dopo aver stimolato a lungo la ghiandola si prende un nuovo tracciato, si osserva come esso differisca notevolmente dal tracciato che corrisponde alla ghiandola fresca. La diminuzione di resistenza è assai meno evidente, mentre la fase successiva d'aumento prende un grande sviluppo e la resistenza della ghiandola sale assai più sopra il valore a riposo di quel che non fosse discesa durante la prima fase. Di più l'inizio della secrezione della saliva, diversamente che nella ghiandola fresca, si fa ancora durante la seconda fase, ma quando l'aumento ha portata la resistenza della ghiandola sopra il valore che ha a riposo.

In altre parole la fase di diminuita resistenza s'è accorciata tanto che occupa solo una parte del tempo latente della secrezione, mentre prima lo sopravanzava.

Se si va a indagare quale sia la concentrazione osmotica della saliva che corrisponde a questi differenti stadi si nota come essa vada diminuendo. Ho determinato infatti il Δ della saliva raccolta durante tre periodi successivi di 15 minuti ciascuno di stimolazione ritmica della ghiandola. Esso va aumentando. Gli elettrogrammi che corrispondono all'inizio e alla fine di ciascuno di questi periodi, dimostrano come si vada parallelamente e progressivamente riducendo la prima e accentuando la seconda fase. Cosicchè è logico supporre un nesso fra i due fenomeni.

Infine stimolando a lungo la ghiandola con stimoli ritmici si stabilisce quella che si può dire la curva di fatica della ghiandola. Se gli stimoli sono molto ravvicinati in modo che i loro effetti nella curva si fondano si nota come la resistenza si mantenga per un tempo notevolmente lungo sotto la normale, specialmente nella ghiandola fresca, pur continuando dopo una prima rapida diminuzione ad aumentare; infine come raggiunga ed oltrepassi il valore normale per continuare a salire finchè dura lo stimolo.

Ma se si ha cura di distanziare gli stimoli, mettendo per esempio tra l'uno e l'altro la distanza di un secondo, così che i loro effetti siano singolarmente evidenti, si possono notare altre notevoli particolarità.

Dapprima le onde che segnano diminuzione di resistenza, molto evidenti dànno l'impressione di sorgere su d'una retta molto inclinata che segna il progressivo aumento di resistenza della ghiandola.

Ogni variazione in meno trova in altre parole la resistenza della ghiandola, ad un livello sempre più alto perchè la fase d'aumento prevale su quella di diminuzione, e la terza fase di diminuzione non ha il tempo di manifestarsi.

Persistendo gli stimoli, le cose tendono a cambiare. Le onde di diminuzione si fanno sempre meno evidenti, e insieme l'inclinazione della retta

su cui sorgono diminuisce; a un certo punto le prime son quasi scomparse e la retta ha raggiunto l'orizzontale.

Se si sospendono gli stimoli per qualche istante, senza dar tempo alla retta di muoversi dall'orizzontale, alla resistenza quindi di diminuire, alla ripresa degli stimoli la fase di diminuzione torna evidente e così quella di aumento che riprende a prevalere, in modo che la retta torna ad inclinarsi.

L'atropina abolisce ogni variazione di resistenza a dosi che non modificano la reazione vascolare allo stimolo, la pilocarpina non dà nessuna modificazione evidente, l'occlusione sia dal dotto escretore che della carotide non mutano l'effetto dello stimolo.

La stimolazione del simpatico non ha per lo più nessuno effetto. Talvolta una piccola diminuzione.

Quale può essere l'interpretazione di questi fenomeni? Possiamo escludere modificazioni dovute al contenuto di saliva e di sangue, perchè l'occlusione sia del dotto che dell'arteria non hanno effetto. Di più, come s'è ricordato, l'atropina, che non abolisce le modificazioni circolatorie, fa scomparire il fenomeno.

Nel processo di secrezione della saliva sono da distinguere due serie di fenomeni: i primi conducono alla formazione nell'interno della cellula dei costituenti specifici della saliva, la seconda serie comprende i fenomeni pei quali si attiva una corrente del sangue al dotto salivare, corrente che asporta il contenuto della cellula.

Questa divisione non è arbitraria. Il primo è un processo relativamente lento; ad esso è legato con ogni probabilità il maggior consumo d'ossigeno che segue la secrezione, e vi corrisponde l'aspetto istologico della cellula a riposo ripiena di grossi granuli di zimogeno, granuli che scompaiono dalla cellula in attività e che si riformano molto lentamente.

La diminuzione della concentrazione della saliva durante una secrezione prolungata può indicare una riserva di zimogeno che si va esaurendo.

Dunque senza incorrere in grave errore si può ammettere che nella cellula nel momento che precede lo stimolo, sia già raccolta una certa riserva di costituenti della saliva e che non sia necessario, perchè la secrezione s'inizi, se non di mettere in moto quella tal corrente dal sangue al dotto.

Si pensa dai più che il polo cellulare rivolto verso il dotto sia ampiamente permeabile alla saliva.

La questione è di sapere come può passar acqua dal sangue attraverso la membrana. Esclusa, per ovvie ragioni, la pressione arteriosa non arresta che l'ipotesi di un fattore osmotico.

Bayliss suppone che ciò avvenga attraverso la membrana cellulare semimpermeabile quando, per effetto dello stimolo, i grossi granuli di zimogeno si dissolvono: « è concepibile, egli dice, che lo spaccarsi di questi

granuli formi sostanze a peso molecolare molto più piccolo e di più alta pressione osmotica » (1).

L'ipotesi si fonda sul reperto microscopico della presenza prima e della scomparsa poi, dei granuli di zimogeno.

Aggiungiamo, ciò che pare ovvio, che la membrana ammesso pure che tenda a divenir semipermeabile durante la secrezione, non lo può esser del tutto quando la ghiandola è a riposo.

Se così press'a poco stanno le cose, si può vedere di farle coincidere con le variazioni di resistenza.

La prima fase di diminuzione di resistenza può corrispondere all'aumento di concentrazione degli elettroliti, dovuto al dissolversi dei granuli nell'interno della cellula; la seconda fase d'aumento al mutar di permeabilità della membrana, la terza al ritorno allo stato di prima.

La seconda fase s'inizia evidentemente quando dura ancora l'effetto della prima. La curva rappresenterà quindi la somma di due effetti di senso contrario che a un certo punto si sovrappongono.

Nella ghiandola fresca c'è abbondanza di zimogeno; la diminuzione di resistenza dovuta al dissolversi di esso è tale, da smascherare in parte l'effetto contrario. A tali condizioni corrisponde la secrezione di una saliva ricca di costituenti solidi.

Man mano che la riserva di zimogeno si va esaurendo: la prima fase cede d'importanza alla seconda, dura meno a lungo, e si va facendo sempre minore la diminuzione di resistenza ch'essa arreca. Intanto la concentrazione della saliva va diminuendo.

L'inizio della terza fase coincide con l'arresto della secrezione. A osservar bene le curve, la secrezione dura ancora qualche tempuscolo dopo che la resistenza ha ripreso a diminuire.

Si può pensare che la membrana ridiventi permeabile e così cessi a un certo punto, con l'effetto osmotico, la secrezione.

La fase d'aumento segue certamente la fase di diminuzione; non è da credere che s'inizi insieme e sia dapprima mascherata e solo poi prevalga. La velocità con cui si stabilisce la prima fase è press'a poco la stessa nella ghiandola fresca e in quella stanca.

Se le due fasi s'iniziassero insieme, la velocità dovrebbe andar diminuendo pel prevalere dell'aumento sulla diminuzione, ma così non è. Se una segue l'altra, è da vedere se si può stabilire tra loro un nesso causale.

Le curve di fatica sono state fatte tenendo presente questa possibilità. Il fatto è che finchè è distinta la prima, la seconda fase è pure evidente nell'inclinazione della retta su cui sorgono le onde di diminuzione; ma quando quest'ultime sono ridotte al minimo, la retta diviene orizzontale. In altre parole se scompare la prima fase scompare anche la seconda.

(1) Bayliss, *Principles of General Physiology*, p. 335, Longmans, Londra, 1924.

Se pensiamo un istante che la membrana è un complesso colloidale, nulla è più facile che supporre ch'essa reagisce alla modificazione di concentrazione degli elettroliti, che sarebbe il primo effetto dello stimolo.

Non so fino a che punto l'interpretazione dei vari fatti sembri convincente. Ad essa non è da attribuire comunque che un valore euristico e provvisorio, in vista dei resultati sulla variazione di resistenza alla corrente alternata.

Biologia. — *La capacità di partenogenesi delle uova di seconda generazione di razza bivoltina di bachi da seta.* Nota di C. Iucci presentata [1] dal Corrisp. A. Russo.

I miei studi [2] dimostrano che nelle uova dei bachi da seta capacità di voltinismo e capacità di partenogenesi - capacità dell'uovo fecondato di svilupparsi ininterrottamente sino alla schiusura, e capacità dell'uovo vergine di iniziare lo sviluppo e di proseguirlo più o meno - sono due aspetti diversi di una stessa fisionomia metabolica, sono due manifestazioni distinte di una sola potenzialità fisiologica, la capacità di sviluppo dell'uovo; e, strettamente correlati l'un coll'altro, sono ambedue indici sensibili delle capacità metaboliche dell'organismo materno, della costituzione fisiologica individuale e di razza.

È interessante notare che anche il Verson aveva avuto l'intuizione di una correlazione tra capacità di voltinismo e di partenogenesi, ed aveva fatto ricorso a studi statistici comparati per dimostrare la cosa. Ma non riuscì a mettere in evidenza una superiorità, nella tendenza alla partenogenesi, di razze bivoltine rispetto a quelle univoltine; e questo perchè, la sua intuizione non essendo abbastanza chiara, egli ricorse, per lo studio statistico, non alla prima generazione di razza bivoltina, ma alla seconda. Ora la seconda generazione di razza bivoltina produce uova che anneriscono ed entrano in diapausa invernale come le uova di una razza univoltina; non hanno capacità di svilupparsi ininterrottamente e rapidamente schiudere pochi giorni dopo la deposizione; si comportano come annuali e non come uova bivoltine.

Tuttavia è prevedibile che queste uova di seconda generazione di razza bivoltina conservino una tendenza al bivoltinismo maggiore di quella che

(1) Nella seduta del 7 marzo 1926.

(2) C. Iucci, *Le capacità di sviluppo dell'uovo, vergine o fecondato di Bombyx Mori; sinechepidosi e partenogenesi.* « Boll. Lab. Zool. », Roma 1925.

C. Iucci, *Su l'eredità del tipo metabolico nei bachi da seta. I. Il bivoltinismo.* « Boll. Lab. Zool. gen. e agr. Portici », vol. XVII, pp, 187-318 (e « Annali R. Sc. Sup. Agr. Portici », pp. 1-134) 1924.

Wen Darwin, *Precocità di sviluppo e tendenza alla partenogenesi nei bachi da seta di razza gialla indigena.* « Boll. Soc. Natur. », Napoli, settembre 1925.

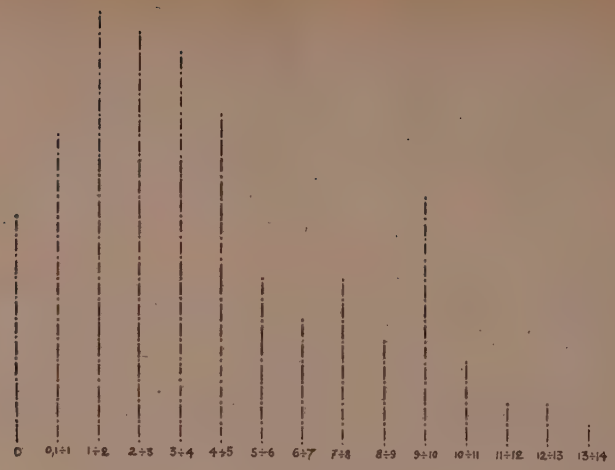
hanno le uova di razza univoltina; e che sia così lo dimostra il fatto - noto agli allevatori giapponesi e controllato dalla Prof. Foà - che, incubando a bassa temperatura (18°) il seme deposto dalle farfalle di prima generazione di razza bivoltina, è possibile ottenere una buona percentuale di nascite (trivoltine) dalle uova deposte dalle farfalle della seconda generazione.

Data l'intima correlazione tra voltinismo e partenogenesi, è presumibile che, anche nella tendenza alla partenogenesi, come al bivoltinismo, le uova deposte dalla seconda generazione di razza bivoltina siano superiori alle uova di razza univoltina.

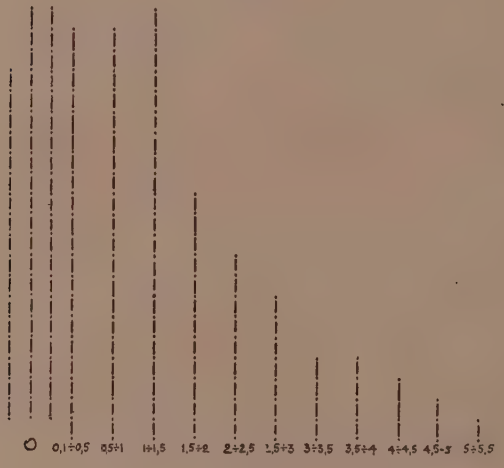
Anche questa previsione teorica è risultata confermata dalle osservazioni statistiche.

Ho raccolto una grandissima quantità di dati su ovature deposte da femmine vergini di seconda generazione di razza bivoltina giapponese Awojiku. Ma non ho ancora utilizzati, per i calcoli, che i dati raccolti su 221 ovature deposte da femmine tutte sfarfallate il 19 agosto 1924. Per ogni ovatura ho computato il numero delle uova deposte e il numero delle uova, che con una colorazione più o meno avanzata hanno rivelato (esaminate in data 1° settembre) l'evento di uno sviluppo partenogenetico più o meno avanzato; ho anche calcolato il numero delle uova nelle quali la colorazione appariva completa e regolare, dando aspetto di uova normali in diapausa.

Numero totale delle uova deposte	72.209
» delle ovature	221
» medio, per ogni ovatura, di uova deposte	326.7
Numero totale delle uova più o meno colorate	4.641
» medio per ogni ovatura, di uova più o meno colorate $\frac{4641}{221} =$	21
Numero totale delle uova annerite completamente	816
» medio, per ogni ovatura, di uova annerite completamente $\frac{816}{221} =$	3.69
Percentuale di uova più o meno colorate:	
Secondo il rapporto tra le medie { numero medio uova colorate / numero medio uova deposte $\frac{21 \times 100}{326.7} =$	6.733
Secondo la media tra i rapporti { somma delle percentuali (calcolate per ogni singola ovatura) / numero delle ovature $\frac{1484}{221} =$	6.715
Percentuale di uova annerite completamente:	
Secondo il rapporto tra le medie { numero medio uova annerite / numero medio uova deposte $\frac{3.69 \times 100}{326.7} =$	1.129
Secondo la media tra i rapporti { somma delle percentuali (calcolate per ogni singola ovatura) / numero delle ovature $\frac{231.68}{221} =$	1.048



A



B

Diagrammi della variabilità di tendenza alla partenogenesi nelle femmine di una sola giornata di sfarfallamento di un lotto di seconda generazione di razza bivoltina Awojiku.

Sulle ascisse la capacità di partenogenesi misurata dal numero percentuale, nell'ovatura, di uova più o meno colorate (A) o di uova annerite completamente (B); sulle ordinate la frequenza di classe.

La distribuzione della variabilità della tendenza alla partenogenesi appare asimmetrica: si svolge quasi tutta a destra del mòdo, o classe di maggior frequenza; a sinistra non rimangono che una o due classi a rappresentare il saliente della curva. Ma questa asimmetria è reale o soltanto apparente?

Per il diagramma B potrebbe ammettersi la seconda versione, perchè l'indice scelto registra come O la capacità di partenogenesi di tutte quelle ovature che non presentano alcun uovo annerito completamente. Nella classe O vengono perciò, molto verosimilmente, a trovarsi accumunate ovature a capacità di partenogenesi varia, dalla vera incapacità alla capacità appena di poco inferiore a quella che si manifesta colla presenza di un uovo annerito completamente.

Ora appunto la classe O ha una frequenza assai superiore a quella di ogni altra classe e sufficiente a dare, convenientemente distribuita in classi a frequenza decrescente, un versante, a sinistra del modo, simmetrico al destro.

Ma per la curva A non sembra possibile questa interpretazione.

L'indice scelto permette di graduare anche capacità di partenogenesi molto basse; e difatti restano sole poche ovature nella classe O.

La distribuzione della variabilità della capacità di partenogenesi sembra dunque essere veramente asimmetrica, nel senso che sono regolarmente rappresentati tanti gradi di capacità di partenogenesi superiori al medio, mentre gradi inferiori mancano o scarseggiano assai.

Su un numero totale di uova deposte (vedi tabella) di 72209 ho trovato 4641 uova più o meno colorate, delle quali 816 annerite regolarmente e completamente. Quindi il numero medio di uova più o meno colorate per ogni ovatura è di 21, delle quali tre o quattro (3.69) annerite completamente e regolarmente; ed essendo il numero medio delle uova di ogni ovatura 327, si ha una percentuale di uova più o meno colorate vicina a 7 %, di cui un po' più dell'1 % annerite regolarmente. Percentuali d'assai superiori a quelle trovate da Darwin Wen per uova di razza Giallo indigena [1]. Lo avevo previsto.

Le uova deposte dalle femmine di seconda generazione di razza bivoltina, pur essendo diapausepidòsiche *come le uova di razza univoltina, hanno, rispetto a queste, capacità di sviluppo notevolmente superiori; come dimostra, più che la*

(1) Darwin Wen calcola, per le varie giornate di sfarfallamento di due lotti di razza gialla indigena, A e B, l'indice di partenogenesi – cioè il valore che esprime il numero medio, per ogni ovatura, di uova annerite – dividendo per il numero di ovature di ciascun lotto la somma del numero delle uova annerite completamente, con la metà del numero delle uova annerite parzialmente.

Facendo la media tra le varie giornate, per il giallo A l'indice di portenogenesi risulta 3.103; per il giallo B 1.732.

Applicando ai dati del Darwin Wen lo stesso computo usato per i miei, per il giallo A si hanno in tutto, su 319 ovature, 583 uova annerite completamente e 313 parzialmente.

Il numero medio per ogni ovatura di uova più o meno colorate è dunque:

(583 + 313) : 319 = 2.809; e di uova annerite completamente: 583 : 319 = 1.828.

Per il giallo B, avendosi, su 193 ovature, 279 uova annerite completamente e 108 parzialmente:

(279 + 108) : 193 = 2.005 è il numero medio per ogni ovatura di uova più o meno colorate; e

108 : 193 = 0.560 di uova annerite completamente.

Facendo media tra A e B, per la razza gialla indigena risulta 2.407 il numero medio per ogni ovatura di uova più o meno colorate e 1.194 il numero medio per ogni ovatura di uova annerite completamente.

tendenza al trivoltinismo accidentale (poche raggiungono la soglia della sinechepidosi*), il grado notevole, che queste uova possiedono, di tendenza allo sviluppo partenogenetico.*

Un interesse tutto particolare avrebbe lo studio, da questo punto di vista e con questo metodo, di razze polivoltine. Io sono sicuro che l'esame del grado di tendenza alla *sinechepidosi* e del grado di tendenza alla *partenogenesi*, delle uova nelle successive generazioni dell'anno, rivelerebbe un regolare, progressivo abbassamento delle capacità di sviluppo dell'uovo traverso le generazioni, fino all'ultima, della quale le uova, anche regolarmente fecondate, sono tutte *diapausepidòsiche*, inette allo sviluppo rapido ed ininterrotto.

OPERE PERVENUTE IN DONO ALL'ACCADEMIA

presentate nella seduta del 7 marzo 1926.

L'assistenza ai tubercolosi di guerra (Opera nazionale per la protezione e l'assistenza degli invalidi della guerra). Roma, 1925. 4°, pp. 1-25.

Ginori Conti P. — Discorso commemorativo di Peratoner A. pronunziato da P. G. C. Roma, 1926. 8°, pp. 1-8.

Guidi C. — Una questione di priorità. (Estr. dagli « Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino ». Vol. LXI, pp. 21-22). Torino, 1926. 8°.

Harlen Bretz J. — Geology and Mineral Resources of the Kings Quadrangle. (Extr. from « Bulletin of State Geological Survey ». N. 43, pp. 205-304). Urbana, 1923. 8°.

Harmer F. W. — Further Remarks on the meteorological Conditions of the Pleistocene Epoch. (From the « Quarterly Journal of the Royal Meteorological Society ». Vol. 51, n. 215, pp. 247-259). S. l., 1925. 8°.

Harmer F. W. — The Pluvial Period of Central and Southern Italy. (Extr. from the « Geological Magazine ». Vol. LXIII, n. 739, pp. 27-37). London, 1926. 8°.

Herrera L. — Progresos de la plasmogenia en 1924. (Extr. da « la Semana Médica », año XXXII, n. XII, 1925, pp. 655-662). Buenos Aires, 1925. 4°.

Rohwer S. A. — Sawflies from the Maritime Province of Siberia (From the « Proceedings of the United States National Museum ». Vol. 68). Washington, 1925. 8°, pp. 1-12.

Söderström A. — Die Verwandtschaftsbezvehungen der Mollusken. Upsala, 1925. 8°, pp. 1-30.

Id. — Homologie, Homogenie und Homoplasie. Eine Kritik, ein Protest und ein Türanschlag. Upsala, 1925. 8°, pp. 1-8.

G. C.